

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования_
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Радиофизический факультет

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совета ННГУ

протокол № 1 от 16.01.2024 г.

Рабочая программа дисциплины

Линейная алгебра

Уровень высшего образования

Бакалавриат

Направление подготовки / специальность

03.03.03 - Радиофизика

Направленность образовательной программы

Радиофизика и электроника

Форма обучения

очная

г. Нижний Новгород

2024 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.14 Линейная алгебра относится к обязательной части образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ОПК-1: Способен применять базовые знания в области физики и радиофизики и использовать их в профессиональной деятельности, в том числе в сфере педагогической деятельности;	ОПК-1.1: Обладает фундаментальными знаниями в области физики и радиофизики ОПК-1.2: Анализирует физические аспекты теории и возможности ее использования для решения научно-исследовательских задач ОПК-1.3: Решает научно-исследовательские задачи, в том числе в сфере педагогической деятельности	ОПК-1.1: Знает основные понятия линейной алгебры. Умеет применять основной аппарат линейной алгебры для решения задач профессиональной деятельности. Имеет опыт практического применения основного аппарата линейной алгебры для решения задач по физике и радиофизике. ОПК-1.2: Знает методы доказательства основных теорем линейной алгебры. Умеет применять основной аппарат линейной алгебры к анализу физических аспектов теории при решении научно-исследовательских задач. Владеет опытом анализа физических аспектов линейной алгебры и возможностей ее использования для решения научно-исследовательских задач. ОПК-1.3: Знает методы решения ключевых задач линейной алгебры. Умеет решать практические задачи в области физики и	Контрольная работа	Экзамен: Практическое задание Контрольные вопросы

		радиофизики с помощью прикладных аспектов линейной алгебры. Владеет навыками применения аппарата линейной алгебры для решения задач профессиональной деятельности.		
--	--	---	--	--

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	4
Часов по учебному плану	144
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	16
- КСР	2
самостоятельная работа	40
Промежуточная аттестация	54 Экзамен

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/ лабора- торные работы), часы	Всего	
	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о
Тема 1. Матрицы и определители	18	6	4	10	8
Тема 2. Системы линейных уравнений	18	6	4	10	8
Тема 3. Линейные пространства	18	7	3	10	8
Тема 4. Линейные операторы	17	7	2	9	8
Тема 5. Квадратичные формы	17	6	3	9	8
Аттестация	54				
КСР	2				2

Итого	144	32	16	50	40
-------	-----	----	----	----	----

Содержание разделов и тем дисциплины

Практические занятия организуются, в том числе, в форме практической подготовки. На практических занятиях более подробно изучается программный материал в плоскости отработки практических умений и навыков и усвоения следующих тем:

Раздел 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ.

Прямоугольные матрицы. Сумма матриц, произведение матрицы на число, умножение матриц. Свойства этих операций. Перестановки, инверсии, транспозиции. Определитель квадратной матрицы, свойства определителя. Разложение определителя по элементам строки или столбца. Теорема Лапласа. Определитель произведения матриц. Обратная матрица, критерий обратимости, вычисление обратной матрицы.

Раздел 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Ранг произведения матриц. Элементарные преобразования строк матрицы и их применение к вычислению ранга матрицы. Системы линейных уравнений. Основные определения: частное и общее решения, совместные и несовместные системы, эквивалентность систем. Теорема Крамера. Критерий совместности систем линейных уравнений (теорема Кронекера-Капелли). Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Линейные однородные системы (ЛОС). Свойства решений. Фундаментальная система решений (ФСР). Теорема о ФСР. Структура общего решения ЛОС.

Неоднородные системы (ЛНС). Структура общего решения ЛНС.

Раздел 3. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА.

Аксиоматика линейного векторного пространства (ЛВП), примеры, свойства ЛВП. Линейная зависимость системы векторов в ЛВП. Базис и размерность ЛВП. Координаты вектора в данном базисе. Матрица перехода от одного базиса к другому, преобразование координат вектора при переходе к новому базису. Подпространство. Сумма и пересечение подпространств. Линейные оболочки и теоремы о размерности. Изоморфизм ЛВП. Евклидово пространство, определение и примеры. Неравенства Коши-Буняковского и треугольника. Общий вид скалярного произведения в конечномерном евклидовом пространстве. Ортогональность и ортонормированность системы векторов. Процесс ортогонализации системы векторов.

Раздел 4. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В КОНЕЧНОМЕРНОМ ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

Определение линейного оператора. Примеры. Образ и ядро линейного оператора. Матрица линейного оператора в данном базисе. Преобразование матрицы оператора при переходе от одного базиса к другому. Действия с линейными операторами. Обратный оператор, его свойства. Критерий обратимости. Подпространства, инвариантные относительно оператора. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора, их свойства.

Характеристическое уравнение. Унитарный и самосопряженный операторы. Свойства собственных значений и векторов самосопряженного оператора. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного оператора, нахождение его.

Раздел 5. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ.

Линейная, билинейная и квадратичная формы в ЛВП. Матрица квадратичной формы (КФ) и ее преобразование при переходе к новому базису. Ранг и индекс КФ. Теорема Лагранжа о приведении КФ к диагональному виду. Теорема Якоби. Закон инерции КФ. Критерий Сильвестра положительной определенности КФ.

Темы практических занятий.

1. Определители
2. Действия с матрицами. Обратная матрица

3. Ранг матрицы. Линейные однородные системы.
 4. Линейные неоднородные системы. Линейные системы с параметрами.
 5. Линейные подпространства. Собственные числа и вектора.
 6. Контрольная работа по теме “Определители. Системы линейных уравнений. Собственные числа и вектора”. Приведение квадратичных форм к каноническому виду методом ортогонального преобразования.
 7. Приведение квадратичных форм к каноническому виду методами Лагранжа и Якоби.
 8. Приведение уравнения поверхности 2-го порядка к каноническому виду.
- Практическая подготовка направлена на формирование и развитие знаний, умений и навыков применения аппарата линейной алгебры для решения задач профессиональной деятельности. Текущий контроль успеваемости реализуется в форме проведения контрольной работы и проверки выполнения домашних заданий. Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (экзамен).

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Самостоятельная работа студента при изучении дисциплины «Линейная алгебра» включает выполнение практических заданий под контролем преподавателя, а также подготовку к контрольной работе и экзамену.

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:

Контрольная работа по теме “Определители. Системы линейных уравнений. Собственные числа и вектора”

Вариант 1.

1. Найти обратную матрицу, если $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.
2. Найти фундаментальную систему решений и общее решение линейной однородной системы
$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ -5x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ -4x_1 + 14x_2 - 8x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 10x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$
.
3. Найти общее решение линейной системы
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 13 \\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 21 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 3 \end{cases}$$
.
4. Решить систему $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} n & n+1 \\ n-1 & n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} n & 2 \\ 1 & n \end{pmatrix}$, а n -- номер вашего варианта.
5. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

Вариант 2.

1. Найти обратную матрицу, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 6 & 9 \\ -4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$.
2. Найти фундаментальную систему решений и общее решение линейной однородной системы
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$
.
3. Найти общее решение линейной системы
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_4 = -3 \\ x_1 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases}$$
.
4. Решить систему $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} n & n+1 \\ n-1 & n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} n & 2 \\ 1 & n \end{pmatrix}$, а n -- номер вашего варианта.
5. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Вариант 3.

1. Найти обратную матрицу, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.
2. Найти фундаментальную систему решений и общее решение линейной однородной системы
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \\ 9x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0 \\ -9x_1 - 4x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$
3. Найти общее решение линейной системы
$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -1 \\ -4x_1 + 13x_3 + x_4 = -10 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 6 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -8 \end{cases}$$
4. Решить систему $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} n & n+1 \\ n-1 & n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} n & 2 \\ 1 & n \end{pmatrix}$, а n — номер вашего варианта.
5. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Вариант 4.

1. Найти обратную матрицу, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.
2. Найти фундаментальную систему решений и общее решение линейной однородной системы
$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ -5x_1 + 11x_2 + 8x_3 - 6x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$
3. Найти общее решение линейной системы
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -2 \\ -5x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 12x_4 = -4 \\ 4x_1 - 7x_2 + 5x_3 - 12x_4 = -1 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}$$
4. Решить систему $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} n & n+1 \\ n-1 & n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} n & 2 \\ 1 & n \end{pmatrix}$, а n — номер вашего варианта.

Вариант 5.

1. Найти обратную матрицу, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Найти фундаментальную систему решений и общее решение линейной однородной системы $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$.
3. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 13 \\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 21 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 3 \end{cases}$.
4. Решить систему $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} n & n+1 \\ n-1 & n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} n & 2 \\ 1 & n \end{pmatrix}$, а n -- номер вашего варианта.
5. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

Вариант 6.

1. Найти обратную матрицу, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Найти фундаментальную систему решений и общее решение линейной однородной системы $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$.
3. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_4 = -3 \\ x_1 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases}$.
4. Решить систему $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} n & n+1 \\ n-1 & n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} n & 2 \\ 1 & n \end{pmatrix}$, а n -- номер вашего варианта.
5. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Найти фундаментальную систему решений и общее решение линейной однородной системы

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}.$$

3. Найти общее решение линейной системы

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -1 \\ -4x_1 + 13x_3 + x_4 = -10 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 6 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -8 \end{cases}.$$

4. Решить систему $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} n & n+1 \\ n-1 & n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} n & 2 \\ 1 & n \end{pmatrix}$, а n -- номер вашего

5. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Вариант 8.

1. Найти обратную матрицу, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Найти фундаментальную систему решений и общее решение линейной однородной системы

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ -5x_1 + 11x_2 + 8x_3 - 6x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}.$$

3. Найти общее решение линейной системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -2 \\ -5x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 12x_4 = -4 \\ 4x_1 - 7x_2 + 5x_3 - 12x_4 = -1 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}.$$

4. Решить систему $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} n & n+1 \\ n-1 & n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} n & 2 \\ 1 & n \end{pmatrix}$, а n -- номер вашего

5. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

Вариант 9

2. Найти фундаментальную систему решений и общее решение линейной однородной

$$\text{системы } \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ -5x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ -4x_1 + 14x_2 - 8x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 10x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}.$$

3. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 13 \\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 21 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 3 \end{cases}$.

4. Решить систему $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} n & n+1 \\ n-1 & n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} n & 2 \\ 1 & n \end{pmatrix}$, а n -- номер вашего вари

5. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

Вариант 10.

1. Найти обратную матрицу, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 6 & 9 \\ -4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$.

2. Найти фундаментальную систему решений и общее решение линейной однородной

$$\text{системы } \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

3. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_4 = -3 \\ x_1 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases}$.

4. Решить систему $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} n & n+1 \\ n-1 & n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} n & 2 \\ 1 & n \end{pmatrix}$, а n -- номер вашего вари

5. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Вариант 11.

2. Найти фундаментальную систему решений и общее решение линейной однородной системы

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \\ 9x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0 \\ -9x_1 - 4x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

3. Найти общее решение линейной системы

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -1 \\ -4x_1 + 13x_3 + x_4 = -10 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 6 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -8 \end{cases}$$

4. Решить систему $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} n & n+1 \\ n-1 & n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} n & 2 \\ 1 & n \end{pmatrix}$, а n -- номер вашего варианта

5. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Вариант 12.

1. Найти обратную матрицу, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

2. Найти фундаментальную систему решений и общее решение линейной однородной системы

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ -5x_1 + 11x_2 + 8x_3 - 6x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

3. Найти общее решение линейной системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -2 \\ -5x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 12x_4 = -4 \\ 4x_1 - 7x_2 + 5x_3 - 12x_4 = -1 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}$$

4. Решить систему $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} n & n+1 \\ n-1 & n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} n & 2 \\ 1 & n \end{pmatrix}$, а n -- номер вашего варианта

5. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне, выше предусмотренного программой
отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.

	знаний вследствие отказа обучающегося от ответа		много негрубых ошибок	подготовки . Допущено несколько негрубых ошибок	подготовки . Допущено несколько несущественных ошибок	подготовк и. Ошибок нет.	
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельным и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».

	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»
--	-------	---

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Практическое задание) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

1. Вычислить определитель

2. Найти обратную матрицу, если

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{3. Найти ранг матрицы } \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & -3 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & -3 & 7 & 5 \\ -5 & 2 & 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{4. Если } A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \text{ то чему равен элемент } C_{31} \text{ матрицы } C = A \cdot B \text{ ?}$$

5. Решить систему уравнений

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 - x_4 = 10 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 - 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 + x_4 = 10 \end{cases}$$

6. Найти фундаментальную систему решений и общее решение линейной однородной

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ -5x_1 + 11x_2 + 8x_3 - 6x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}.$$

системы

7. Найти общее решение линейной системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -2 \\ -5x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 12x_4 = -4 \\ 4x_1 - 7x_2 + 5x_3 - 12x_4 = -1 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}$$

8. Дана неоднородная система уравнений с 5 неизвестными

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = 1 \\ -x_1 - x_2 + x_4 = -1 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

а) Найти общее решение неоднородной системы уравнений.

б) Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

в) Найти общее решение однородной системы.

9. Решить систему $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} n & n+1 \\ n-1 & n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} n & 2 \\ 1 & n \end{pmatrix}$, для

а) $n=1$; б) $n=2$; в) $n=3$; г) $n=4$.

10. Записать систему линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - x_4 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$ в виде матричного уравнения

$A \cdot x = b$. Найти общее решение или показать несовместность. Если система совместна, то сделать проверку:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

11. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

12. Дана матрица линейного оператора в стандартном базисе:

Найти матрицу этого оператора в базисе $(1,2), (2,1)$.

13. Пусть $A = \{f_1, f_2, f_3\}$ – система многочленов $f_1 = 2 + t$, $f_2 = 1 + t$, $f_3 = -t$.

а) Найти ранг и базу системы A .

б) Многочлены, не входящие в базу, выразить через многочлены базы.

14. Пусть $V_1 = L(f_1, f_2)$, $V_2 = L(g_1, g_2)$, где $f_1 = 3 + t^2$, $f_2 = 2 + 2t^2$, $g_1 = 2t + 13t^2$, $g_2 = -12t - 3t^2$.

а) Найти базис и размерность пересечения этих подпространств.

б) Базис пересечения разложить по f_1, f_2 и по g_1, g_2 .

15. Для заданной системы векторов выяснить является ли она линейно зависимой или линейно независимой? Найти базу системы, выразить остальные элементы через базу. Чему равен ранг системы?
 $a_1 = (-1, -1, -2, -5)$, $a_2 = (3, 2, 1, 1)$, $a_3 = (-2, -1, 1, 4)$.

16. Для заданной системы векторов выяснить является ли она линейно зависимой или линейно независимой? Найти базу системы, выразить остальные элементы через базу. Чему равен ранг системы?
 $a_1 = (-1, 1, 0, 5)$, $a_2 = (0, 2, 1, -1)$, $a_3 = (1, 1, 1, -6)$.

17. Дана система многочленов $f_1(t) = 1 - t^2$, $f_2(t) = 1 + t^3$, $f_3(t) = t - t^3$, $f_4(t) = 1 + t + t^2 + t^3$. выяснить является ли она линейно зависимой или линейно независимой? Найти базу системы, выразить остальные элементы через базу. Чему равен ранг системы?

18. Дана система многочленов $f_1(t) = 4 + t + 3t^4$, $f_2(t) = 1 - 5t + 6t^4$, $f_3(t) = 3 + 6t - 3t^4$, $f_4(t) = 1$ выяснить является ли она линейно зависимой или линейно независимой. Найти базу системы, выразить остальные элементы через базу. Чему равен ранг системы?

19. Дано подпространство $L = L(a_1)$ и вектор $b = (1, 1, 1)$, $a_1 = (0, 1, 1)$. Найти проекцию вектора b на $L(a_1)$ и ортогональную составляющую. Сделать проверку.

Критерии оценивания (оценочное средство - Практическое задание)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне, выше предусмотренного программой

Оценка	Критерии оценивания
отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

1. Перестановки, инверсии, транспозиции, подстановки.
2. Прямоугольные матрицы. Сумма матриц, произведение матрицы на число, умножение матриц. Свойства этих операций.
3. Определитель квадратной матрицы и его свойства. Разложение определителя по элементам строки или столбца. Теорема Лапласа. Определитель произведения матриц.
4. Обратная матрица, критерий обратимости, вычисление обратной матрицы.
5. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Ранг произведения матриц. Элементарные преобразования строк матрицы и их применение к вычислению ранга матрицы.
6. Системы линейных уравнений. Основные определения: частное и общее решения, совместные и несовместные системы, эквивалентность систем.
7. Теорема Крамера. Критерий совместности систем линейных уравнений (теорема Кронекера - Капелли). Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
8. Линейные однородные системы (ЛОС). Свойства решений. Фундаментальная система решений (ФСР). Теорема о ФСР. Структура общего решения ЛОС.

9. Неоднородные системы (ЛНС). Структура общего решения ЛНС.
10. Аксиоматика линейного векторного пространства (ЛВП), примеры, свойства ЛВП.
11. Линейная зависимость системы векторов в ЛВП. Базис и размерность ЛВП. Координаты вектора в данном базисе. Матрица перехода от одного базиса к другому, преобразование координат вектора при переходе к новому базису.
12. Подпространство. Сумма и пересечение подпространств. Линейные оболочки и теоремы о размерности. Изоморфизм ЛВП.
13. Евклидово пространство, определение и примеры. Неравенства Коши - Буняковского и треугольника. Общий вид скалярного произведения в конечномерном евклидовом пространстве. Ортогональность и ортонормированность системы векторов. Процесс ортогонализации системы векторов.
14. Определение линейного оператора. Примеры. Образ и ядро линейного оператора.
15. Матрица линейного оператора в данном базисе. Преобразование матрицы оператора при переходе от одного базиса к другому.
16. Действия с линейными операторами. Обратный оператор, его свойства. Критерий обратимости.
17. Подпространства, инвариантные относительно оператора. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора, их свойства. Характеристическое уравнение.
18. Унитарный и самосопряженный операторы. Свойства собственных значений и векторов самосопряженного оператора. Существование и нахождение ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного оператора.
19. Линейная, билинейная и квадратичная формы в ЛВП. Матрица квадратичной формы (КФ) и ее преобразование при переходе к новому базису. Ранг и индекс КФ.
20. Теорема Лагранжа о приведении КФ к диагональному виду. Теорема Якоби.
21. Закон инерции КФ. Критерий Сильвестра положительной определенности КФ.

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне, выше предусмотренного программой
отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы

Оценка	Критерии оценивания
	одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Кремер Наум Шевелевич. Линейная алгебра : Учебник и практикум Для СПО / Кремер Н. Ш., Фридман М. Н., Тришин И. М. ; под ред. Кремера Н.Ш. - 3-е изд. - Москва : Юрайт, 2021. - 422 с. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-534-10169-0. - Текст : электронный // ЭБС "Юрайт"., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=764763&idb=0>.
2. Беклемишев Д. В. Решение задач из курса аналитической геометрии и линейной алгебры / Беклемишев Д. В. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2014. - 192 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ФИЗМАТЛИТ - Математика. - ISBN 978-5-9221-1480-6., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=700577&idb=0>.
3. Фаддеев Дмитрий Константинович. Задачи по высшей алгебре : учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по мат. специальностям. - Изд. 17-е, стер. - СПб. : Лань, 2008. - 288 с. - (Классическая учебная литература по математике) (Классические задачки и практикумы) (Учебники для вузов. Специальная литература). - ISBN 978-5-8114-0427-8 : 232.80., 118 экз.

Дополнительная литература:

1. Беклемишева Л. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре : [учеб. пособие] / под ред. Д. В. Беклемишева. - Изд. 2-е, перераб. - М. : Физматлит, 2004. - 496 с. - ISBN 5-9221-0010-6 : 196.10., 36 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

- 1) Ильин В.А., Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитической геометрия. Учебник. – М.: МГУ, 2007. – 393 с. <https://djvu.online/file/FrvvYGuE9qkfd>
- 2) Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. Учебное пособие / Под ред. Д.В. Беклемишева –2-е изд., перераб. – М.: Физматлит, 2004. – 496 с. <https://djvu.online/file/zE4fFBE5Pp6Qx>
- 3) Фонд образовательных электронных ресурсов ННГУ <http://www.unn.ru/books/resources>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки/специальности 03.03.03 - Радиофизика.

Автор(ы): Павлов Игорь Сергеевич, доктор физико-математических наук, доцент
Дубков Александр Александрович, доктор физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Павлов Игорь Сергеевич, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 18 декабря 2023 г., протокол № 09/23.