

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол от «30» ноября 2022 г. № 13

Рабочая программа дисциплины

**Численные методы решения
краевых задач**

(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования

магистратура

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность

010401 Математика

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы

Фундаментальная математика и приложения

(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Форма обучения

очная

(очная / очно-заочная / заочная)

Нижний Новгород

2023 год

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина относится к части, формируемой участниками образовательных отношений.

Б1.О.19 Численные методы решения краевых задач

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
ПК-1. Способен формулировать и решать актуальные и значимые задачи фундаментальной и прикладной математики	ПК-1.1. Знать математические и численные методы решения базовых математических задач и классических задач естествознания.	Знать математические и численные методы решения краевых и начально-краевых задач математической физики, а также задачи естествознания, математическими моделями которых являются краевые и начально-краевые задачи математической физики	собеседование
	ПК-1.2. Уметь строить логические последовательные цепочки рассуждений, формулировать промежуточные и окончательные результаты, находить эквивалентные формулировки математических утверждений, понимать полноту математического доказательства.	Уметь правильно проводить предварительные аналитические преобразования, необходимые для применения метода конечных элементов и метода конечных разностей, а также для оценки погрешности, при численном решении краевых и начально-краевых задач математической физики.	задачи
	ПК-1.3. Владеть навыками использования математических методов обработки информации, полученной в результате экспериментальных исследований или производственной деятельности.	Владеть навыками математических преобразований, необходимых для применения метода конечных элементов и метода конечных разностей, а также для оценки погрешности, при численном решении краевых и начально-краевых задач математической физики.	проектные работы

3. Структура и содержание дисциплины

3.1. Трудоемкость дисциплины

	очная форма обучения
Общая трудоемкость	3 ЗЕТ
Часов по учебному плану	108
в том числе	
контактная работа:	34
- занятия лекционного типа	16
- занятия семинарского типа	16
- текущий контроль (КСР)	2
самостоятельная работа	38
Промежуточная аттестация – экзамен	36

3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе				
		контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы				Самостоятельная работа обучающегося, часы
		из них				
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего контактных часов	
Второй семестр						
Тема 1 Алгоритмы приближенного решения систем алгебраических уравнений, численное дифференцирование и интегрирование	13	3	3		6	7
Тема 2 Методы Бубнова-Галёркина и Ритца. Вариационная формулировка краевых задач.	13	3	3		6	7
Тема 3 Метод конечных элементов для эллиптических уравнений	14	3	3		6	8
Тема 4 Применение метода конечных элементов для приближенного решения дифференциальных уравнений с частными производными	16	4	4		8	8

Тема 5 Сходимость сеточных методов	14	3	3		6	8
Текущий контроль (КСР)	2				2	
Промежуточная аттестация - экзамен	36					
Итого	108	16	16		34	38

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме опросов на занятиях семинарского типа. Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (зачет).

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа заключается в ознакомлении с теоретическим материалом по учебникам, монографиям и учебным пособиям, указанным в списке литературы, решении практических задач, самостоятельном выполнении при контроле со стороны преподавателя заданий по проектным работам, подготовке к семинарам, ответах на вопросы самоконтроля.

Контроль самостоятельной работы – домашние задания, отчеты о выполнении проектных работ.

В частности, важной составляющей изучения дисциплины является самостоятельная работа обучающихся при подготовке к проектным работам по дисциплине с целью их наиболее эффективного проведения. При этой подготовке обучающиеся дополнительно самостоятельно изучают те разделы теоретического материала, которые являются базовыми при проведении очередной проектной работы. Это дополнительное самостоятельное изучение, прежде всего, основано на углубленном самостоятельном изучении соответствующих разделов книг, учебно-методических пособий приведенных в списках основной и дополнительной литературы. Кроме того, при указанном дополнительном самостоятельном изучении можно использовать и доступные ресурсы сети Интернет, так как они являются одним из альтернативных источников быстрого поиска требуемой информации. Их использование возможно для получения основных и дополнительных сведений по изучаемым материалам. Одними из возможных ресурсов для этой цели являются те, которые указаны в списке программного обеспечения и Интернет-ресурсов, см. ниже.

Темы проектных работ:

1. Методика выбора базисных функций в методе конечных элементов.
2. Реализация метода конечных элементов при приближенном решении дифференциальных уравнений с частными производными.
3. Теоретическое и практическое исследование сходимости метода конечных элементов.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине, включающий:

5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций	Шкала оценивания сформированности компетенций					
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично

(индикатора достижения компетенций)							превосходно
	Не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания но не в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения,. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»

зачтено	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не за- чтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

5.2.1. Контрольные вопросы

Вопрос	Код формируемой компетенции
1. Основные методы численного дифференцирования	ПК-1
2. Основные методы численного интегрирования	ПК-1
3. Численное дифференцирование и интегрирование в системе MATLAB	ПК-1
4. Решение задачи Коши для системы ОДУ методом Эйлера	ПК-1
5. Решение задачи Коши для системы ОДУ методом Рунге-Кутты	ПК-1
6. Понятие о методах взвешенных невязок: метод коллокаций.	ПК-1
7. Понятие о методах взвешенных невязок: метод наименьших квадратов.	ПК-1
8. Понятие о методах взвешенных невязок: метод Галеркина.	ПК-1
9. Слабая формулировка понятия решения дифференциального уравнения.	ПК-1
10. Использование кусочно линейных базисных функций в слабом варианте метода Галеркина.	ПК-1
11. Переформулировка слабого метода Галеркина в терминах конечных элементов.	ПК-1
12. Понятие о вариационных методах. Метод Рэлея-Ритца.	ПК-1
13. Метод конечных элементов (МКЭ) в формулировке	ПК-1

Рэля-Ритца.	
14. Основные этапы МКЭ.	ПК-1
15. Структура программы, реализующей МКЭ.	ПК-1
16. Описание входных данных для программы, реализующей МКЭ.	ПК-1
17. Локальные матрицы и векторы нагрузки в МКЭ и их сборка в глобальную матрицу и глобальный вектор.	ПК-1
18. Применение ограничений в МКЭ.	ПК-1
19. Краевые задачи для двумерного уравнения Пуассона. Постановки задач и переход к слабой формулировке.	ПК-1
20. Треугольный конечный элемент.	ПК-1
21. Программирование МКЭ для решения задачи Дирихле.	ПК-1
22. Программирование МКЭ для смешанной задачи Дирихле-Неймана.	ПК-1
23. Особенности программирования МКЭ для эллиптического уравнения в дивергентной форме.	ПК-1
24. Краевые задачи для уравнения теплопроводности. Постановки задач и переход к слабой формулировке.	ПК-1
25. Методы правой и левой разностной производной.	ПК-1
26. Метод Кранка-Николсон.	ПК-1
27. Программирование МКЭ и метода Кранка-Николсон.	ПК-1
28. Особенности программирования системы уравнений теплопроводности.	ПК-1
29. Понятие о триангуляции Делоне. Построение триангуляции в системе MATLAB.	ПК-1
30. Построение линий уровня функции, заданной на триангуляции.	ПК-1
31. Решение задачи Гурса-Дарбу методом конечных разностей.	ПК-1
32. Решение задачи Коши-Дарбу методом конечных разностей.	ПК-1
33. Решение смешанной задачи для волнового уравнения методом конечных разностей.	ПК-1
34. Решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности методом конечных разностей.	ПК-1

5.2.2. Типовые задания для оценки сформированности компетенции

Вариант 1

1. Доказать линейную независимость функций $\varphi_1(t) = t(1-t)$, $\varphi_2(t) = t^2(1-t)$.
2. Найти условия принадлежности данной точки данному треугольнику.

3. Какой порядок погрешности имеет формула $u_{n\pm 1}'' \approx \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2}$, где h – постоянный шаг одномерной сетки?

5.2.3. Типовые задачи для оценки сформированности компетенции

Задача 1. Пусть вершины плоского треугольника заданы своими координатами,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}. \text{ Докажите, что } |\Delta| \text{ равен удвоенной площади этого треугольника.}$$

Задача 2. Пусть $\Phi = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix},$

$$H_i = \frac{1}{\Delta} (1, x, y) \Phi(:, i). \text{ Докажите, что } H_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Задача 3. Пусть $\Phi = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix},$

$$H_i = \frac{1}{\Delta} (1, x, y) \Phi(:, i). \text{ Докажите, что } \sum_{i=1}^3 H_i(x, y) = 1. \text{ Как называются указанные функции при использовании треугольных конечных элементов.}$$

Задача 4. Пусть $z = 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2$, Ω – область, ограниченная эллипсом $z(x, y) = 0$. Вычислите производную данной функции по единичному вектору внешней нормали к границе области Ω .

Задача 5. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, c = 3, g = 3 + \frac{4}{a^2} + \frac{2}{b^2} + \frac{4x}{a^2} - \frac{4y}{b^2},$

$$\vec{f} = \left(\frac{x^3}{a^2}, \frac{y^3}{b^2} \right)^T. \text{ Убедитесь, что функция } z = 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 \text{ является решением уравнения}$$

$$-div(A \nabla z + z a) + b \cdot \nabla z + c z = g - div \vec{f}.$$

Задача 6. Пусть

$$\Phi = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad H_i = \frac{1}{\Delta} (1, x, y) \Phi(:, i),$$

Ω – треугольник с вершинами (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$. Вычислите интеграл $\int_{\Omega} H_1(x, y) dx dy$.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977 (6), 1983 (4), 1989 (2) .
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Лаборатория базовых знаний, 2000 (1), 2001 (1), 2002 (1), 2003 (49), 2004 (20), 2007 (5), 2008 (2).

б) дополнительная литература:

1. Вержбицкий В. М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. пособие для вузов. М.: Высшая школа, 2001 (11).
2. Формалев В. Ф. , Ревизников Д. Л. Численные методы: учеб. пособие для студентов техн. ун-тов. М.: Физматлит, 2006 (10).

в) учебно-методическая литература, имеющаяся на кафедре прикладной математики для выдачи студентам

1. Чернов А.В. Численная реализация метода конечных элементов в системе MATLAB. Н.Новгород: ННГУ, 2016 (42).
2. Чернов А.В. Численное решение распределенных задач оптимизации методом параметризации управления. Н.Новгород: ННГУ, 2014 (70).
3. Чернов А.В. Применение системы MatLab к решению простейшей задачи вариационного исчисления: описание лабораторной работы. Н.Н.: ННГУ, 2007 (85).

г) программное обеспечение и Интернет-ресурсы

<http://www.lib.unn.ru/ebs.html>

MATLAB

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Компьютерный класс, оснащенный персональными компьютерами с установленной на них системой MATLAB, а также оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ВО ННГУ - магистратура по направлению подготовки 01.04.01 Математика.

Автор (ы) к.ф.-м.н., доц. А.В.Чернов

Рецензент (ы)

Заведующий кафедрой М.В. Иванченко

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики от 30 ноября 2022 года, протокол № 3.