

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совета ННГУ

протокол № 1 от 16.01.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Практикум по математическому анализу

---

Уровень высшего образования

Бакалавриат

---

Направление подготовки / специальность

01.03.02 - Прикладная математика и информатика

---

Направленность образовательной программы

Прикладная математика и информатика (общий профиль)

---

Форма обучения

очная

---

г. Нижний Новгород

2024 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.26 Практикум по математическому анализу относится к обязательной части образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

| Формируемые компетенции<br>(код, содержание компетенции)   | Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции  |   | Наименование оценочного средства   |                              |
|--|--|---|------------------------------------|------------------------------|
|  | Индикатор достижения компетенции<br>(код, содержание индикатора)   | Результаты обучения по дисциплине   | Для текущего контроля успеваемости | Для промежуточной аттестации |
| ОПК-1: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности | ОПК-1.1: Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук<br>ОПК-1.2: Умеет использовать фундаментальные знания в профессиональной деятельности, осуществлять выбор методов решения задач профессиональной<br>ОПК-1.3: Имеет практический опыт применения фундаментальных знаний, полученных в области математических и естественных наук в профессиональной деятельности. | ОПК-1.1:<br>Знать основные понятия математического анализа, понятия предела и его свойства, понятия непрерывной функции и ее свойства, дифференцируемой функции и ее свойства, формулы и ряда Тейлора, неопределенного и определенного интеграла, функции многих переменных, числового и функционального рядов, ряда Фурье. Понимать взаимосвязи между изученными понятиями и их свойствами, теоремы о непрерывной функции, о дифференцируемой функции, теоремы об интегрируемости, формулировки критерия Коши сходимости последовательностей и рядов, равномерную сходимость.<br><br>ОПК-1.2:<br>Уметь применять приемы раскрытия неопределенностей, технику дифференцирования, методы интегрирования, исследование рядов на сходимость и равномерную сходимость, раскладывать | Контрольная работа                 | Зачёт:<br>Задания            |

|  |  |   |  |  |
|--|--|---|--|--|
|  |  | <p>функции в ряды Тейлора и Фурье, определять области сходимости рядов</p> <p>ОПК-1.3:<br/>Владеть навыком взятия производных, исследовать на экстремум функции одной и многих переменных, применять определенный интеграл к решению геометрических и физических задач, выбирать наиболее подходящий прием или метод для решения практической задачи.</p> |  |  |
|--|--|---|--|--|

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

|  | очная                    |
|--|--------------------------|
| <b>Общая трудоемкость, з.е.</b>  | <b>4</b>                 |
| <b>Часов по учебному плану</b>   | <b>144</b>               |
| в том числе  |                          |
| <b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>                           |                          |
| - занятия лекционного типа   | <b>0</b>                 |
| - занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы) | <b>128</b>               |
| - КСР  | <b>2</b>                 |
| <b>самостоятельная работа</b>  | <b>14</b>                |
| <b>Промежуточная аттестация</b>  | <b>0</b><br><b>Зачёт</b> |

#### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

| Наименование разделов и тем дисциплины | Всего<br>(часы) | в том числе   |  |             |  |
|--|-----------------|---|--|-------------|--|
|  |                 | Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем),<br>часы из них |  |             | Самостоятельная<br>работа<br>обучающегося,<br>часы |
|  |                 | Занятия<br>лекционного<br>типа  | Занятия<br>семинарского<br>типа<br>(практические<br>занятия/ лабора<br>торные<br>работы), часы | Всего       |  |
|  | 0<br>ф<br>0     | 0<br>ф<br>0   | 0<br>ф<br>0  | 0<br>ф<br>0 | 0<br>ф<br>0  |

|  |     |   |     |     |    |
|--|-----|---|-----|-----|----|
| Тема 1. Вещественные числа   | 10  |   | 10  | 10  |    |
| Тема 2. Числовые последовательности                                  | 13  |   | 12  | 12  | 1  |
| Тема 3. Предел функции   | 14  |   | 12  | 12  | 2  |
| Тема 4. Непрерывные функции  | 11  |   | 10  | 10  | 1  |
| Тема 5. Производная функции  | 12  |   | 10  | 10  | 2  |
| Тема 7. Основные теоремы о дифференцируемых функциях и их приложения | 11  |   | 10  | 10  | 1  |
| Тема 8. Неопределенный интеграл                                      | 11  |   | 10  | 10  | 1  |
| Тема 9. Определенный интеграл  | 11  |   | 10  | 10  | 1  |
| Тема 10 Приложения определенного интеграла                           | 7   |   | 6   | 6   | 1  |
| Тема 11. Функции многих переменных и пределы                         | 11  |   | 10  | 10  | 1  |
| Тема 12. Непрерывные функции многих переменных                       | 8   |   | 8   | 8   |    |
| Тема 13 Дифференцирование функции многих переменных                  | 11  |   | 10  | 10  | 1  |
| Тема 14. неявно заданные функции                                     | 7   |   | 6   | 6   | 1  |
| Тема 15. Экстремумы функций многих переменных                        | 5   |   | 4   | 4   | 1  |
| Аттестация   | 0   |   |     |     |    |
| КСР  | 2   |   |     | 2   |    |
| Итого  | 144 | 0 | 128 | 130 | 14 |

### Содержание разделов и тем дисциплины

Тема 1. Вещественные числа. Определение вещественного числа. Свойства пространства вещественных чисел.

Тема 2. Числовые последовательности. Определение предела числовой последовательности. Свойства предела числовой последовательности. Критерий Коши сходимости числовой последовательности.

Тема 3. Предел функции. Определение и свойства предела функции. Первый и второй замечательные пределы. Понятие эквивалентных бесконечно малых. Раскрытие неопределенностей.

Тема 4. Непрерывные функции. Определение непрерывности функции в точке. Классификация точек разрыва функции.

Тема 5. Производная функции. Определение производной функции. Таблица производных. Основные правила дифференцирования. Производная сложной функции. Производная параметрически заданной функции.

Тема 6. Основные теоремы о дифференцируемых функциях и их приложения. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа. Формула Тейлора. Построения графика функции.

Тема 7. Неопределенный интеграл. Таблица первообразных. Теорема о замене переменных в неопределенном интеграле. Правило интегрирования по частям. Основные классы интегрируемых функций.

Тема 8. Определенный интеграл. Определение интеграла по Риману. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменных в определенном интеграле.

Тема 9. Приложения определенного интеграла. Вычисление длины дуги, площади области, объема с помощью определенного интеграла. Физические приложения определенного интеграла.

Тема 10. Функции многих переменных. Область определения функции многих переменных. Понятие повторного и двойного предела функции многих переменных.

Тема 11. Непрерывные функции многих переменных. Определение непрерывности функции многих переменных в точке по Коши и по Гейне.

Тема 12. Дифференцирование функции многих переменных. Исследование функции на дифференцируемость в точке с помощью определения. Понятие частной производной функции многих переменных в точке. Дифференциалы первого и второго порядка. Производная по направлению.

Тема 13. Неявно заданные функции. Дифференцируемость неявно заданной функции.

Тема 14. Экстремумы функций многих переменных. Теоремы о необходимости и достаточных условиях экстремума в точке. Условный экстремум.

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/calculus.htm>
2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие. М.: АСТ Астрель, 2010. 558 с. (252 экз.)
3. Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу / М.И.Т.(в 3 т), 2003 – 472 с. (116 экз.)
4. Графики функций: учебно-метод. пособие. Сост. Т.П.Киселева, И.И.Олюнина. - Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2015. - 43с. <http://www.unn.ru/books/resources.html>
5. Контрольные задания по теме «Функции многих переменных» : практикум. Ч. 1 / О. В. Гордеева, Т. П. Киселева, И. И. Олюнина, Н. А. Сизова ; ННГУ им. Н. И. Лобачевского. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2020. - 25 с. - Текст : электронный.

#### 5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

##### 5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

##### 5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:

| Вариант 1  | Вариант 2   |
|--|---|
| Найти пределы  | Найти пределы   |
| 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5 - (n-1)^5 - 10n^4}{n^3 - n + 4}$   | 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 + (3n+2)^3}{(3n-1)^3 + (n+1)^3}$   |
| 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2n^3+1}{3n^3-2}}$   | 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n+1)^3} - \sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}$   |
| 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^6 + 8} (\sqrt{n^3 + 2} - \sqrt{n^3 + 1})$  | 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n-1}{5n+1} \right)^{n^2}$   |
| 4. Доказать по определению, что $x_n = \frac{3n^2+n-1}{2^n}$ бесконечно малая последовательность.  | 4. Доказать по определению, что $x_n = \frac{(n^3+3) \cos \frac{1}{n}}{3^n}$ бесконечно малая последовательность.   |
| 5. Найти $\inf x_n$ , $\sup x_n$ , верхний и нижний пределы последовательности $x_n = \frac{n+2}{2n-1} \cos \frac{\pi n}{2}$   | 5. Найти $\inf x_n$ , $\sup x_n$ , верхний и нижний пределы последовательности $x_n = \frac{n+1}{2n+1} \cos \frac{\pi n}{3}$  |
| 6. Пользуясь теоремой о монотонной и ограниченной последовательности или критерием Коши исследовать на сходимость последовательность $x_n = \frac{1}{\sqrt[5]{2}} + \frac{1}{\sqrt[5]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$ | 6. Пользуясь теоремой о монотонной и ограниченной последовательности или критерием Коши исследовать на сходимость последовательность $x_n = \frac{5}{2^2} + \frac{7}{3^2} + \dots + \frac{2n+3}{(n+1)^2}$ |
| 7. Доказать по определению, что $x_n = \frac{n!}{4^n}$ бесконечно большая последовательность.  | 7. Доказать по определению, что $x_n = 1 - (-1)^n \sqrt[3]{n}$ бесконечно большая последовательность.   |

## Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

| Оценка     | Критерии оценивания   |
|------------|---|
| зачтено    | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно». |
| не зачтено | Хотя бы одна компетенция, на формирование которых направлена дисциплина, сформирована на уровне «неудовлетворительно» или «плохо».      |

## 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

### Шкала оценивания сформированности компетенций

| Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций) | плохо   | неудовлетворительно  | удовлетворительно  | хорошо  | очень хорошо  | отлично   | превосходно  |
|--|---|--|--|---|---|---|--|
|  | не зачтено  |  |  | зачтено   |   |   |  |
| <u>Знания</u>  | Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа | Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки                          | Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок   | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок   | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок                               | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.  | Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.   |
| <u>Умения</u>  | Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа              | При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки | Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме | Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами | Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами. | Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме | Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов |
| <u>Навыки</u>  | Отсутствие базовых навыков. Невозможность   | При решении стандартных задач не продемонстрир   | Имеется минимальный набор навыков  | Продemonстрированы базовые навыки при   | Продemonстрированы базовые навыки при   | Продemonстрированы навыки при   | Продemonстрирован творческий подход к  |

|  |  |   |  |  |  |  |                             |
|--|--|---|--|--|--|--|-----------------------------|
|  | оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа | ованы базовые навыки. Имели место грубые ошибки | для решения стандартных задач с некоторым и недочетами | решении стандартных задач с некоторым и недочетами | решении стандартных задач без ошибок и недочетов | решении нестандартных задач без ошибок и недочетов | решению нестандартных задач |
|--|--|---|--|--|--|--|-----------------------------|

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

| Оценка     |                     | Уровень подготовки   |
|------------|---------------------|--|
| зачтено    | превосходно         | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой |
|            | отлично             | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».  |
|            | очень хорошо        | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»  |
|            | хорошо              | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».   |
|            | удовлетворительно   | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»                                     |
| не зачтено | неудовлетворительно | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».   |
|            | плохо               | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»  |

**5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:**

**5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ОПК-1**

- Доказать, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sign} \left( \sin \frac{1}{x} \right)$  не существует.
- Разложить по формуле Тейлора функцию  $f(x) = xe^{2x}$  в окрестности точки  $x_0 = 1$  до  $O((x-1)^n)$

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x+x^2)+\ln(1-3x+x^2)}{x^2}$$

$$2. \text{Найти } f'_+(x); f'_-(x) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2^{\frac{1}{x}}-1}; & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

**Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)**

| Оценка     | Критерии оценивания   |
|------------|---|
| зачтено    | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно». |
| не зачтено | Хотя бы одна компетенция, на формирование которых направлена дисциплина, сформирована на уровне «неудовлетворительно» или «плохо».      |

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. Том 1 : учебник для вузов / Фихтенгольц Г. М. - 17-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2023. - 608 с. - Книга из коллекции Лань - Математика. - ISBN 978-5-507-45809-7., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=859125&idb=0>.
2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. Том 2 : учебник для вузов / Фихтенгольц Г. М. - 17-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2023. - 800 с. - Книга из коллекции Лань - Математика. - ISBN 978-5-507-47277-2., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=883765&idb=0>.
3. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / Демидович Б. П. - 25-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2023. - 624 с. - Книга из коллекции Лань - Математика. - ISBN 978-5-507-47148-5., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=865605&idb=0>.
4. Кудрявцев Лев Дмитриевич. Сборник задач по математическому анализу. Том 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость : Учебное пособие. - 2-е изд. - Москва : Издательская фирма "Физико-математическая литература" (ФИЗМАТЛИТ), 2010. - 496 с. - ВО - Бакалавриат. - ISBN 978-5-9221-0306-0., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=741018&idb=0>.
5. Кудрявцев Лев Дмитриевич. Сборник задач по математическому анализу. Том 2. Интегралы. Ряды : Учебное пособие. - 2-е изд. - Москва : Издательская фирма "Физико-математическая литература" (ФИЗМАТЛИТ), 2009. - 504 с. - ВО - Бакалавриат. - ISBN 978-5-9221-0307-0., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=741019&idb=0>.
6. Кудрявцев Лев Дмитриевич. Сборник задач по математическому анализу. Том 3. Функции нескольких переменных : Учебное пособие. - 3-е изд. - Москва : Издательская фирма "Физико-математическая литература" (ФИЗМАТЛИТ), 2018. - 472 с. - ВО - Бакалавриат. - ISBN 978-5-9221-1706-7., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=741020&idb=0>.

Дополнительная литература:

1. Киселева Татьяна Петровна. Графики функций : учебно-методическое пособие / Т. П. Киселева, И. И. Олюнина ; ННГУ им. Н. И. Лобачевского. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2015. - 44 с. - Текст : электронный., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=850169&idb=0>.
2. Контрольные задания по теме «Функции многих переменных» : практикум. Ч. 1 / О. В. Гордеева, Т. П. Киселева, И. И. Олюнина, Н. А. Сизова ; ННГУ им. Н. И. Лобачевского. - Нижний



Новгород : Изд-во ННГУ, 2020. - 25 с. - Текст : электронный,  
<https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=794615&idb=0>.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

<http://www.unn.ru/books/resources.html>

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки 01.03.02 - Прикладная математика и информатика.

Автор(ы): Кротов Николай Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент  
Сизова Наталья Алексеевна.

Заведующий кафедрой: Калинин Алексей Вячеславович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 13.12.2023, протокол № 3.