

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол от «30» ноября 2022 г. № 13

Рабочая программа дисциплины

Некорректные задачи

(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования

магистратура

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность

010401 Математика

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы

Фундаментальная математика и приложения

(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Форма обучения

очная

(очная / очно-заочная / заочная)

Нижний Новгород

2023 год

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина относится к обязательной части.

Б1.О.17 Некорректные задачи

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1.: Знает принципы системного подхода, позволяющие осуществлять анализ проблемных ситуаций	Знать основные понятия и подходы теории некорректных задач, метод регуляризации Тихонова, принцип обобщенной невязки, метод квазирешений и метод регуляризации на компактах	собеседование
	УК-1.2.: Умеет вырабатывать стратегию действий основываясь на критическом анализе проблемных ситуаций	Уметь грамотно осуществлять выбор метода решения некорректной задачи и реализовывать его в виде компьютерной программы, производить сведение коэффициентных обратных задач, связанных с обыкновенными дифференциальными уравнениями, к интегральному уравнению Фредгольма первого рода методом функций Грина, разрабатывать на основе аналитических расчетов комплекс тестов для отладки компьютерных программ, разработанных для решения указанных обратных задач	лабораторные работы, задачи
	УК-1.3.: Владеет навыками системного подхода к анализу проблемных ситуаций	Владеть навыками решения систем линейных алгебраических уравнений с плохо обусловленной матрицей, а также систем с симметричной положительно определенной матрицей, зависящей от положительного параметра, возникающих при решении уравнения обобщенной невязки; навыками сведения коэффициентных обратных задач, связанных с обыкновенными дифференциальными уравнениями, к интегральному уравнению Фредгольма первого рода; навыками разработки компьютерных программ для решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода	лабораторные работы, задачи
ОПК-2 Способен строить и анализировать математические модели в современном	ОПК-2.1.: Знает математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении	Знать простейшие математические модели в современном естествознании, обладающие признаками некорректности, в частности, допускающие представление в виде систем линейных алгебраических уравнений с плохо обусловленной матрицей или в виде интегрального уравнения Фредгольма первого рода	собеседование

естествознании, технике, экономике и управлении	ОПК-2.2.: Умеет модифицировать, анализировать и реализовывать математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении	Уметь преобразовывать математические модели современного естествознания, обладающие признаками некорректности, в частности, коэффициентные обратные задачи, связанные с обыкновенными дифференциальными уравнениями, к системе линейных алгебраических уравнений с плохо обусловленной матрицей или к интегральному уравнению Фредгольма первого рода, а также находить и применять подходы к их устойчивому численному решению	задачи
	ОПК-2.3.: Владеет навыками модификации, анализа и реализации новых математических моделей в современном естествознании, технике, экономике и управлении	Владеть навыками преобразования математических моделей современного естествознания, обладающих признаками некорректности, в частности, коэффициентных обратных задач, связанных с обыкновенными дифференциальными уравнениями, к системе линейных алгебраических уравнений с плохо обусловленной матрицей или к интегральному уравнению Фредгольма первого рода, а также отыскания и применения подходов к их устойчивому численному решению	задачи

3. Структура и содержание дисциплины

3.1. Трудоемкость дисциплины

	очная форма обучения
Общая трудоемкость	3 ЗЕТ
Часов по учебному плану	108
в том числе	
контактная работа:	33
- занятия лекционного типа	0
- занятия семинарского типа	32
- текущий контроль (КСР)	1
самостоятельная работа	75
Промежуточная аттестация – зачет	

3.2. Содержание дисциплины

Наименование	и	Всего	в том числе
--------------	---	-------	-------------

		контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них				Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего контактных часов	
Седьмой семестр						
Тема 1 Решение систем ЛАУ, заданных с погрешностями, методом регуляризации Тихонова при наличии информации о совместности точной системы	9		3		3	6
Тема 2 Решение систем ЛАУ, заданных с погрешностями, методом регуляризации Тихонова при отсутствии информации о совместности точной системы	8		2		2	6
Тема 3 Решение систем ЛАУ, заданных с погрешностями, методом регуляризации Тихонова с использованием принципа обобщенной невязки	9		3		3	6
Тема 4 Метод регуляризации Тихонова для решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода	8		2		2	6
Тема 5 Конечномерная аппроксимация сглаживающего функционала невязки при решении интегрального уравнения Фредгольма первого рода методом регуляризации Тихонова	8		2		2	6
Тема 6 Метод квадратных корней для решения систем ЛАУ с симметричной положительно определенной матрицей. Факторизация Холецкого	10		3		3	7
Тема 7 Решение систем ЛАУ с симметричной положительно определенной матрицей и с зависимостью от положительного параметра	11		3		3	8

методом, сочетающим факторизацию Холецкого и сингулярное разложение						
Тема 8 Число обусловленности матрицы и оценка погрешности решения систем ЛАУ	8		2		2	6
Тема 9 Коэффициентные обратные задачи для уравнения установившихся колебаний упругого стержня	9		3		3	6
Тема 10 Сведение простейших обратных задач гравиметрии, геологоразведки, ЯМР-томографии к интегральному уравнению Фредгольма первого рода. Сведение задачи о восстановлении размытой фотографии к двумерному интегральному уравнению Фредгольма первого рода	9		3		3	6
Тема 11 Метод функций Грина для сведения коэффициентных обратных задач, связанных с ОДУ, к интегральному уравнению Фредгольма первого рода	9		3		3	6
Тема 12 Применение метода функций Грина к конкретным обратным задачам	9		3		3	6
Текущий контроль (КСР)	1				1	
Промежуточная аттестация - зачет						
Итого	108		32		33	75

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме опросов на занятиях семинарского типа. Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (зачет).

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа заключается в ознакомлении с теоретическим материалом по учебникам, монографиям и учебным пособиям, указанным в списке литературы, решении практических задач, самостоятельном выполнении при контроле со стороны преподавателя заданий по лабораторным работам, подготовке к семинарам, ответах на вопросы самоконтроля.

Контроль самостоятельной работы – домашние задания, отчеты о выполнении лабораторных работ.

В частности, важной составляющей изучения дисциплины является самостоятельная работа обучающихся при подготовке к лабораторным работам по дисциплине с целью их наиболее эффективного проведения. При этой подготовке обучающиеся дополнительно самостоятельно изучают те разделы теоретического материала, которые являются базовыми при проведении очередной лабораторной работы. Это дополнительное самостоятельное изучение, прежде всего, основано на углубленном самостоятельном изучении соответствующих разделов книг, учебно-методических пособий приведенных в списках основной и дополнительной литературы. Кроме того, при указанном дополнительном самостоятельном изучении можно использовать и доступные ресурсы сети Интернет, так как они являются одним из альтернативных источников быстрого поиска требуемой информации. Их использование возможно для получения основных и дополнительных сведений по изучаемым материалам. Одними из возможных ресурсов для этой цели являются те, которые указаны в списке программного обеспечения и Интернет-ресурсов, см. ниже.

Темы лабораторных работ:

1. Решение систем ЛАУ с симметричной положительно определенной матрицей методом квадратных корней.
2. Решение систем ЛАУ с симметричной положительно определенной матрицей и с зависимостью от положительного параметра методом, сочетающим факторизацию Холецкого и сингулярное разложение.
3. Решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода.
4. Решение обратной задачи об определении модуля упругости стержня.
5. Решение обратной задачи об определении распределения плотности стержня.
6. Решение обратной задачи об определении поперечного профиля стержня.

Примечание. Каждый студент получает индивидуальные задания по каждой из приведенных выше тем, самостоятельно пишет программу, реализующую соответствующий метод в системе MATLAB, и решает с ее помощью поставленную задачу, после чего пишет письменный отчет и защищает его на семинарском занятии.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине, включающий:

5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	Не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оце-	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без	Уровень знаний в объеме, превышающем про-

	нить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	ошибки.	ошибки.	негрубых ошибок	несущественных ошибок	ошибок.	грамму подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений . Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания но не в полном объеме.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи . Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественным недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продемонстрированы все основные умения,. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»

	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не за- чтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

5.2.1. Контрольные вопросы

Вопрос	Код формируемой компетенции
1. Привести примеры коэффициентных обратных задач, допускающих сведение к интегральному уравнению Фредгольма первого рода	ОПК-2
2. Дать определение корректности по Адамару и по Тихонову	УК-1
3. Дать определение регуляризирующего оператора	УК-1
4. Сформулировать основную теорему о сходимости метода регуляризации Тихонова.	УК-1
5. Понятия нормального решения системы ЛАУ. Понятие нормальной системы и ее свойства	УК-1
6. Построение сглаживающего функционала невязки при наличии и при отсутствии априорной информации о совместности точной системы ЛАУ	УК-1
7. Принцип обобщенной невязки для решения систем ЛАУ	УК-1
8. Применение метода регуляризации Тихонова для решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода	УК-1
9. Конечномерная аппроксимация сглаживающего функционала при использовании метода регуляризации Тихонова для решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода	УК-1
10. Метод квадратных корней для решения систем ЛАУ с симметричной, положительно определенной матрицей	УК-1
11. Метод, сочетающий факторизацию Холецкого и сингулярное разложение, для решения системы ЛАУ с симметричной, положительно определенной матрицей и с зависимостью от положительного параметра	УК-1
12. Число обусловленности матрицы и оценка погрешности решения систем ЛАУ	УК-1
13. Использование факторизации Холецкого для вычисления определителя, обратной матрицы и числа обусловленности симметричной положительно определенной матрицы	УК-1
14. Сведение обратной задачи об определении модуля упругости стержня к интегральному уравнению Фредгольма первого рода	ОПК-2
15. Метод решения прямой задачи установившихся поперечных колебаний упругого стержня	ОПК-2
16. Разработка тестов для отладки программы решения прямой задачи установившихся поперечных колебаний упругого стержня	ОПК-2

17. Сведение обратной задачи гравиметрии к интегральному уравнению Фредгольма первого рода	ОПК-2
18. Сведение обратной задачи геологоразведки к интегральному уравнению Фредгольма первого рода	ОПК-2
19. Сведение обратной задачи ЯМР-томографии к интегральному уравнению Фредгольма первого рода	ОПК-2
20. Сведение обратной задачи о восстановлении размытой фотографии к двумерному интегральному уравнению Фредгольма первого рода	ОПК-2
21. Метод функций Грина	ОПК-2

5.2.2. Типовые тестовые задания для оценки сформированности компетенции

Вариант 1

1. Найти нормальное решение системы $Az = u$ путем минимизации невязки исходной системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Найти нормальное решение системы $Az = u$ как минимальное по модулю классическое решение нормальной системы $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5.2.3. Типовые задачи для оценки сформированности компетенции

Задача 1. Найти с помощью метода регуляризации Тихонова нормальное решение двумерной точной системы $A_0 z = u_0$, если дана возмущенная система $A_\varepsilon z = u_\varepsilon$, при условии, что известна априорная информация о совместности точной системы: $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$, $u_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 \\ \varepsilon^2 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Найти с помощью метода регуляризации Тихонова нормальное решение двумерной точной системы $A_0 z = u_0$, если дана возмущенная система $A_\varepsilon z = u_\varepsilon$, при условии, что априорная информация о совместности точной системы отсутствует: $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$, $u_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + \varepsilon^2 \end{pmatrix}$.

Задача 3. Методом квадратных корней решить систему $Ax = b$ с симметричной положительно определенной матрицей. С помощью полученного разложения Холецкого $A = T^* T$ вычислить определитель $\det A$ и обратную матрицу A^{-1} . Найти число обусловленности и выяснить, какую относительную погрешность может иметь решение возмущенной системы при возмущении одной из компонент правой части на величину 0.01: $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 & 4 \\ 4 & 8 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & -5 \\ 4 & 2 & -5 & 13 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Задача 4. Решить систему $(M^* M + \alpha C)z = f$ с симметричной, положительно определенной матрицей, зависящей от положительного параметра $\alpha > 0$, с помощью разложения Холецкого матрицы C и сингулярного разложения вспомогательной матрицы, при $\alpha = 1$:

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач.-М.: Наука, 1986. (имеется в достаточном количестве (7 экз.) в фундаментальной библиотеке ННГУ)
2. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. (имеется в достаточном количестве (10 экз.) в фундаментальной библиотеке ННГУ)
3. Сумин М.И. Некорректные задачи и методы их решения. Материалы к лекциям для студентов старших курсов. Н.Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2009. –289 с. (имеется в достаточном количестве (10 экз.) в фундаментальной библиотеке ННГУ)
4. Кутерин Ф.А., Сумин М.И. Применение двойственной регуляризации в оптимизации и некорректных задачах (с программным комплексом и описанием лабораторных работ). Электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. – 90 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html> , Регистрационный номер 486.12.06)
5. Сумин М.И. Метод регуляризации на компактных множествах для решения операторных уравнений первого рода. Электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016. 37 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html> , Регистрационный номер 1175.16.06)
6. Сумин М.И. Метод регуляризации А.Н. Тихонова для решения оптимизационных задач. Электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016. 35 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html> , Регистрационный номер 1174.16.06)
7. Сумин М.И. Метод регуляризации А.Н. Тихонова для решения операторных уравнений первого рода. Электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016. 56 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html> , Регистрационный номер 1173.16.06)
8. Огородников И. Н. Введение в обратные задачи физической диагностики: специальные главы высшей математики для технологов : учебное пособие / И. Н. Огородников ; научный редактор А. Н. Кислов ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина. — Екатеринбург : Издательство Уральского университета, 2017. — 199 с. — ISBN 978-5-7996-1950-3.
(http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/47001/1/978-5-7996-1950-3_2017.pdf)

б) дополнительная литература:

1. Зотов Ю.Н., Кутерин Ф.А., Сумин М.И. Применение метода регуляризации для решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода (с программным комплексом и описанием лабораторных работ). Учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2008. – 84 с.
2. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983.
3. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М.: Изд-во Московского университета, 1989.
4. Гончарский А.В., Черепашук А.М., Ягола А.Г. Численные методы решения обратных задач астрофизики. М.: Наука, 1978.
5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Тимонов А.А. Математические методы компьютерной томографии. М.: Наука, 1987.

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы

1. <http://www.lib.unn.ru/ebs.html>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Компьютерный класс, оснащенный персональными компьютерами с установленной на них системой MATLAB, а также оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ВО ННГУ - магистратура по направлению подготовки 01.04.01 Математика.

Автор (ы) к.ф.-м.н., доц. А.В.Чернов

Рецензент (ы)

Заведующий кафедрой М.В. Иванченко

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики от 30 ноября 2022 года, протокол № 3.