

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Физический факультет

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол от
«33» _____ 2025 г. № 8

Рабочая программа дисциплины

Функциональные ряды

Уровень высшего образования
бакалавриат

Направление подготовки
03.03.02 Физика

Направленность образовательной программы
Физика конденсированного состояния

Форма обучения
очная

Нижний Новгород

Год начала подготовки – 2023

1. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина Б1.В.1.04 «Функциональные ряды» относится к части, формируемой участниками образовательных отношений, Блока 1 «Дисциплины (модули)» учебного плана ООП направления подготовки 03.03.02 Физика

Дисциплина преподается в 3 семестре.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	
ПК-1. Способен использовать специализированные знания в области физики для освоения профильных физических дисциплин	Демонстрация способности использовать специализированные знания в области физики для освоения профильных физических дисциплин	<i>Знать</i> теории числовых и функциональных рядов; их приложения к классическим задачам физики.	Теоретические вопросы
		<i>Уметь</i> применять математические методы для решения задач физики; использовать адекватный математический аппарат; выполнять приближенные вычисления и оценивать их погрешность; использовать методы математического моделирования в практической деятельности.	Задачи
		<i>Владеть</i> навыками применения понятий и конструкций математического анализа к решению конкретных задач, методами решения прикладных задач.	Задачи

3. Структура и содержание дисциплины

3.1. Трудоемкость дисциплины

Очная форма обучения	
Общая трудоемкость	3 ЗЕТ
Часов по учебному плану	108
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	32
- занятия лекционного типа, ч	
- практические занятия, ч	32

- лабораторных, ч	
самостоятельная работа, ч	75
КСР, ч	1
Промежуточная аттестация: зачет в 3 семестре	

3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),	Всего (часы)	В том числе				Самостоятельная работа, часы
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них				
		Занятия лекционного типа	Практические занятия	Занятия лабораторного типа	Всего	
Тема 1. Числовые, функциональные и степенные ряды.	60		20		20	40
Тема 2. Ряд и интеграл Фурье.	28		8		8	20
Тема 3. Преобразование Лапласа.	19		4		4	15
КСРИФ	1				1	
Итого	108		32		33	75

Практические занятия (семинарские занятия /лабораторные работы) организуются, в том числе в форме практической подготовки, которая предусматривает участие обучающихся в выполнении отдельных элементов работ, связанных с будущей профессиональной деятельностью.

Практическая подготовка предусматривает решение прикладных задач.

На проведение практических занятий (семинарских занятий /лабораторных работ) в форме практической подготовки отводится 4 часа

Практическая подготовка направлена на формирование и развитие:

- практических навыков в соответствии с профилем ОП: обоснование правильности выбора модели для проведения исследования;
- компетенций – ПК-1.

Текущий контроль успеваемости реализуется в рамках занятий семинарского типа.

Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме - зачет в 3 семестре.

Содержание дисциплины

Тема 1. Числовые, функциональные и степенные ряды

Числовые ряды. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Критерии сходимости числового ряда. Необходимое условие сходимости. Достаточные признаки сходимости: мажорантный и предельный признаки сравнения, Даламбера, Коши, интегральный, Дирихле, Абеля. Абсолютная и условная сходимость. Умножение рядов. Перестановка членов ряда. Функциональные последовательности и ряды функций. Поточечная и равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Непрерывность суммы, интегрирование и дифференцирование равномерно сходящихся рядов. Степенной ряд. Радиус и интервал сходимости степенного ряда. Дифференцирование и интегрирование степенного ряда внутри области сходимости. Ряд Тейлора и Маклорена. Стандартные разложения основных элементарных функций в ряд Маклорена. Приближенные вычисления с помощью рядов значений функций, интегралов, решение алгебраических и дифференциальных уравнений.

Тема 2. Ряд и интеграл Фурье.

Постановка задачи. Гильбертово пространство. Скалярное произведение и норма функции. Поточечная, равномерная сходимость и сходимость в среднем последовательностей и рядов. Ортогональные и ортонормированные элементы пространства со скалярным произведением. Ряд Фурье по ортогональной и ортонормированной системам функций. Минимальное свойство частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя. Условие сходимости ряда Фурье. Равенство Парсеваля. Замкнутые и полные ортогональные системы элементов в пространстве со скалярным произведением. Тригонометрический ряд Фурье для 2π – периодических функций. Разложение четной и нечетной функции в тригонометрический ряд Фурье. Тригонометрический ряд Фурье для функций произвольного периода. Комплексная форма ряда Фурье. Поточечная и равномерная сходимость тригонометрического ряда Фурье. Полнота тригонометрической системы функций.

Интеграл Фурье как предельный случай ряда Фурье. Достаточные признаки сходимости интеграла Фурье. Представление функции интегралом Фурье. Представление четной и нечетной функции интегралом Фурье. Комплексное прямое и обратное преобразования Фурье. Синус-преобразования Фурье и косинус-преобразования Фурье.

Тема 3. Преобразование Лапласа.

Оригиналы и их изображения, теоремы существования и единственности, свойства оператора Лапласа. Изображения единичного скачка, показательной, тригонометрических, гиперболических, степенной функций. Теоремы подобия, смещения, запаздывания, свертывания оригиналов. Дифференцирование и интегрирование оригиналов. Сводная таблица оригиналов и их изображений.

Приложения преобразования Лапласа к интегрированию ЛДУ и систем ЛДУ с постоянными коэффициентами, вычислению несобственных интегралов, решению интегральных уравнений и некоторых задач математической физики.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

4.1. Виды самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа студента при изучении дисциплины «Функциональные ряды» включает выполнение заданий под контролем преподавателя, решение домашних заданий, выполнение домашних самостоятельных работ, подготовку к самостоятельным и контрольным работам, зачету.

Самостоятельная работа заключается в ознакомлении с теоретическим материалом по учебникам, указанным в списке литературы, решении практических задач, подготовке ответов на вопросы самоконтроля. Самостоятельная работа может происходить как в читальном зале библиотеки, так и в домашних условиях.

Самостоятельная работа под контролем преподавателя направлена на активизацию познавательной деятельности студента и установление «обратной связи» между студентом и преподавателем.

В данной программе разработаны задания по конкретным темам дисциплины, позволяющие студентам глубже изучить данный раздел программы, способствующие воспитанию у них способности принимать самостоятельные решения. Для проведения текущего контроля сформированности компетенции используются аудиторные самостоятельные и контрольные работы, домашние самостоятельные работы. Приведены задания для контрольных и самостоятельных работ, отчетов по темам дисциплины.

4.2. Методические указания для обучающихся

Изучение теоретического материала определяется рабочей учебной программой дисциплины, календарным планом изучения дисциплины и перечнем литературы. При подготовке к занятиям рекомендуется повторить материал предшествующих тем рабочего учебного плана, а также материал предшествующих учебных дисциплин, который служит базой изучаемого раздела данной дисциплины. *При подготовке к практическому занятию* необходимо изучить рекомендованную литературу. Изученный материал следует проанализировать в соответствии с планом занятия, затем проверить степень усвоения содержания вопросов.

Практические занятия неразрывно связаны с домашними заданиями как основным видом текущей самостоятельной работы, являясь, в сочетании с систематическим изучением теоретического материала, основой рейтинговой оценки знаний, фиксируемой в промежуточной и итоговой аттестациях.

Самостоятельная работа проводится с целью углубления знаний по дисциплине и предусматривает:

- повторение пройденного учебного материала, чтение рекомендованной литературы;
- подготовку к практическим занятиям;
- выполнение общих и индивидуальных домашних заданий;
- работу с электронными источниками;
- подготовку к сдаче зачета.

Планирование времени на самостоятельную работу важно осуществлять на весь семестр, предусматривая при этом повторение пройденного материала.

При подготовке к зачету следует руководствоваться перечнем вопросов для подготовки к итоговому контролю по курсу. При этом необходимо уяснить суть основных понятий дисциплины.

Самостоятельная работа студентов, прежде всего, заключается в изучении литературы, дополняющей материал, излагаемый в лекционной части курса. Необходимо овладеть навыками библиографического поиска, в том числе в сетевых Интернет-ресурсах.

Существует несколько методов работы с литературой.

Один из них – метод повторения: смысл прочитанного текста можно заучить наизусть. Простое повторение воздействует на память механически и поверхностно. Полученные таким путем сведения легко забываются.

Наиболее эффективный метод – метод осознанного запоминания: прочитанный текст нужно подвергнуть большей, чем простое заучивание, обработке. Чтобы основательно

обработать информацию, важно произвести целый ряд мыслительных операций: прокомментировать новые данные; оценить их значение; поставить вопросы; сопоставить полученные сведения с ранее известными.

Для улучшения обработки информации очень важно устанавливать осмысленные связи, структурировать новые сведения. Изучение научной, учебной и иной литературы требует ведения рабочих записей. Форма записей может быть весьма разнообразной: простой или развернутый план, тезисы, цитаты, конспект.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), включающий:

5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	Не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько незначительных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными незначительными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом.	При решении стандартных задач не	Имеется минимальный набор	Продemonстрированы базовые	Продemonстрированы базовые	Продemonстрированы навыки при	Продemonстрирован творческий

	Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.	навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	подход к решению нестандартных задач.
--	--	--	---	--	--	---	---------------------------------------

Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка	Уровень подготовки
зачтено	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
Не зачтено	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

5.2.1 Контрольные вопросы

№	Вопросы	Код формируемой компетенции
1.	Числовой ряд. Сходимость и расходимость числового ряда. Простейшие свойства сходящихся рядов. Необходимое условие сходимости.	ПК-1
2.	Геометрический и обобщенный гармонический ряды и их сходимость.	ПК-1
3.	Остаток ряда. Связь между сходимостью числового ряда и сходимостью его остатка. Теорема о пределе остатков сходящегося числового ряда.	ПК-1
4.	Ряды с неотрицательными членами. Теоремы сравнения.	ПК-1
5.	Признаки Даламбера и Коши сходимости знакоположительных рядов.	ПК-1
6.	Интегральный признак сходимости знакоположительных рядов.	ПК-1
7.	Знакопередающиеся ряды. Теорема Лейбница. Оценка остатка сходящегося знакопередающегося ряда.	ПК-1
8.	Абсолютно сходящиеся ряды и их свойства. Теорема Коши о сходимости абсолютно сходящегося ряда.	ПК-1
9.	Условно сходящиеся ряды. Теорема Римана.	ПК-1
10.	Функциональные ряды. Частичная сумма и сумма функционального ряда. Сходимость, область сходимости функционального ряда.	ПК-1
11.	Равномерно сходящиеся функциональные ряды, связь между сходимостью и равномерной сходимостью функционального ряда.	ПК-1
12.	Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.	ПК-1
13.	Свойства равномерно сходящихся рядов. Непрерывность суммы ряда. Теоремы о почленном интегрировании и почленном дифференцировании равномерно сходящегося функционального ряда.	ПК-1
14.	Степенной ряд. Первая теорема Абеля. Радиус сходимости. Интервал сходимости. Промежуток сходимости.	ПК-1
15.	Теорема об абсолютной и равномерной сходимости степенного ряда. Непрерывность суммы степенного ряда. Вторая теорема Абеля.	ПК-1
16.	Формулы для вычисления радиуса сходимости степенного ряда.	ПК-1
17.	Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.	ПК-1
18.	Выражение коэффициентов степенного ряда через значения суммы этого ряда и ее производных в центре ряда. Теорема о единственности разложения функции в степенной ряд.	ПК-1
19.	Формальный ряд Тейлора. Понятие аналитической в точке функции. Разложение аналитической функции в степенной ряд. Критерий аналитичности функции.	ПК-1
20.	Достаточное условие разложимости функции в степенной ряд.	ПК-1
21.	Разложение в ряд Тейлора показательной функции e^x , тригонометрических функций $\cos x$, $\sin x$, натурального логарифма $\ln(1+x)$, биномиальный ряд. Разложение в ряд Тейлора других элементарных функций.	ПК-1
22.	Понятие о действиях над степенными рядами: умножение степенных	ПК-1

	рядов, деление степенных рядов, подстановка ряда в ряд.	
23.	Приближенные вычисления с помощью степенных рядов, оценка погрешности в случае знакопеременного и знакоположительного ряда. Другие приложения степенных рядов.	ПК-1
24.	Ортогональные и ортонормированные системы функций. Ортогональность тригонометрической системы функций на отрезке $[-\pi, \pi]$.	ПК-1
25.	Нормировка системы функций. Разложение по ортонормированной системе функций. Коэффициенты Фурье.	ПК-1
26.	Нормировка тригонометрической системы функций. Определение тригонометрического ряда Фурье. Коэффициенты Фурье.	ПК-1
27.	Понятие кусочно-гладкой функции, заданной на отрезке. Точки разрыва первого рода. Разложение кусочно – гладких 2π -периодических функций в тригонометрические ряды Фурье. Формулировка принципа локализации.	ПК-1
28.	Представление непериодической функции рядом Фурье.	ПК-1
29.	Ряды Фурье для четных (нечетных) функций. Разложение функций, заданных на отрезке $[0, \pi]$, в ряд по косинусам или синусам.	ПК-1
30.	Тригонометрические ряды Фурье в случае произвольного интервала.	ПК-1
31.	Сходимость рядов Фурье в «среднем». Неравенство Бесселя. Полнота и замкнутость ортогональной системы функций. Равенство Парсеваля. Полнота и замкнутость тригонометрической системы функций.	ПК-1
32.	Интеграл Фурье. Интеграл Фурье для четных и нечетных функций. Интеграл Фурье для функций, заданных на промежутке $[0, +\infty)$. Преобразования Фурье, формулы обращения.	ПК-1
33.	Оригиналы и изображения, теоремы существования и единственности, изображение единичного скачка, показательной, степенной, тригонометрических и гиперболических функций.	ПК-1
34.	Теоремы подобия, смещения, запаздывания, свертывания оригиналов. Дифференцирование и интегрирование оригиналов.	ПК-1
35.	Таблица оригиналов и их изображений.	ПК-1
36.	Применение преобразования Лапласа к интегрированию ЛДУ и систем ЛДУ с постоянными коэффициентами, вычислению несобственных интегралов, решению интегральных уравнений, некоторых задач математической физики.	ПК-1

5.2.2. Типовые задания/задачи для оценки сформированности компетенции ПК-1

1. Исследуйте ряды на сходимость и установите характер сходимости: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{5^n}$; б)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n + 1}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{10}}; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{10}}.$$

2. Найти сумму ряда: а) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n(n+2)}$; б) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 - (-1)^n}{3^{n-2}}.$

3. Найдите область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3x+2}{n(n+1)x^n}.$

4. Найдите радиус и интервал сходимости степенного ряда и исследуйте поведение ряда на концах интервала сходимости $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n \sqrt{n+1}}$.

5. Докажите равномерную сходимость функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{3^{n-1}}, x \in [0; 1]$.

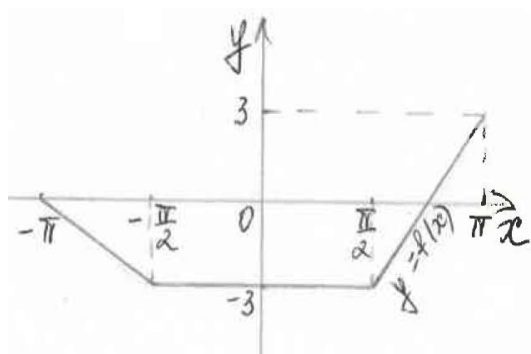
6. Разложите функцию $y = 1 + \frac{x^2}{e^{-2x}}$ в ряд Маклорена и укажите, для каких значений x справедливо разложение.

7. Разложите функцию $y = \sqrt{x^3}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 1$ и укажите, для каких значений x справедливо разложение.

8. Найти сумму степенного ряда $\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{2n+3}}{2n+3} + \dots$

9. Вычислить $\int_0^1 x^4 \cdot \sin \frac{x}{2} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,00001$.

10. Разложить функцию, заданную графически, в ряд Фурье на отрезке $[-\pi; \pi]$. Исследовать сходимость полученного ряда, найти сумму. Построить график функции и график суммы ряда Фурье.



11. Разложить функцию $y = 2x + 1$ на отрезке $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ в ряд Фурье. Исследовать сходимость полученного ряда, найти сумму. Построить график функции и график суммы ряда Фурье.

12. Разложить функцию $y = 1 + 2|\cos x|$ в ряд Фурье по косинусам и в ряд Фурье по синусам на отрезке $[0; \pi]$. Для каждого из полученных рядов исследовать сходимость, найти сумму. Построить график функции и графики суммы ряда Фурье по косинусам и суммы ряда Фурье по синусам.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Солдатов М.А., Круглова С.С., Круглов Е.В. Интегралы несобственные и зависящие от параметра. Ряды: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2014.

В библиотеке ННГУ 90 экз. Ссылка на каталог:
<http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=467655>

2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985.
В библиотеке ННГУ 370 экз. Ссылка на каталог:
<http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=92714>

б) дополнительная литература:

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, т. 1 – М.: Высшая школа, 1988.

В библиотеке ННГУ 370 экз. Ссылка на каталог:
<http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=364323>

2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, т. 2 – М.: Высшая школа, 1988.

В библиотеке ННГУ 325 экз. Ссылка на каталог:
<http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=298122>

3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть 2 – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.

В библиотеке ННГУ 55 экз. Ссылка на каталог:
<http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=31258>
<http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=389760>

4. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа, т.2. – СПб.: Лань, 2008.
В библиотеке ННГУ 208 экз. Ссылка на каталог:
<http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=298117>

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины)

www.biblioclub.ru	ЭБС «Университетская библиотека онлайн»
www.elibrary.ru	Научная электронная библиотека
www.ebiblioteka.ru	Универсальные базы данных изданий

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой, оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения: партами, стульями, учебной доской. Учебная и научная литература, учебно-методические материалы, представленные в библиотечном фонде и в электронных библиотеках.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду

Программа составлена в соответствии с требованиями С ВО" " " 03.03.02 «Физика».

Автор:

доцент кафедры прикладной математики
ИИТММ, к. ф.-м.н.

Ястребова И.Ю.

Рецензент:

Заведующий кафедрой теоретической
физики, д.ф.-м..н., доцент

Бурдов В.А.

Программа одобрена на заседании методической комиссии физического факультета
" 1 " "420704245" 0