

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Радиофизический факультет
(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол от
«31» мая 2023 г. № 6

Рабочая программа дисциплины

Методы математической физики
(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования
бакалавриат
(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность
03.03.03 Радиофизика

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы
Фундаментальная радиофизика
(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Форма обучения
очная
(очная / очно-заочная / заочная)

Нижний Новгород

2023 год

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	Блок 1 Обязательная часть	Дисциплина Б1.О.19 <i>Методы математической физики</i> входит в обязательную часть ООП направления подготовки 03.03.03 Радиофизика с профилем «Фундаментальная радиофизика». Дисциплина обязательна для освоения в 3 и 4 семестрах.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	
ОПК-1. Способен применять базовые знания в области физики и радиофизики и использовать их в профессиональной деятельности, в том числе в сфере педагогической деятельности.	ОПК-1.1. Обладает фундаментальными знаниями в области физики и радиофизики.	Знает современную терминологию, используемую в математической физике и вариационном исчислении, классификацию систем уравнений первого порядка в частных производных (ЧП) и уравнений второго порядка в ЧП, способы приведения их к каноническому виду и т.д, возможности применения методов матфизики для решения практических задач.	Практическое задание

	ОПК-1.2. Анализирует физические аспекты теории и возможности ее использования для решения научно-исследовательских задач.	Знает порядок поиска и анализа литературы по мат. физике, освоил методы математического моделирования и вывода уравнений математической физики, используя вариационные принципы, законы сохранения.	Практическое задание
	ОПК-1.3. Решает научно-исследовательские задачи, в том числе в сфере педагогической деятельности.	Владеет аналитическими методами решения корректно поставленных математических задач для простых областей линейных уравнений в частных производных второго порядка, владеет методами сведения квазилинейных и нелинейных систем уравнений в частных производных первого порядка к системам обыкновенных дифференциальных уравнений.	Практическое задание
ОПК-2. Способен проводить экспериментальные и теоретические научные исследования	ОПК-2.1. Использует методы радиофизических измерений и методы обработки результатов	Знает области применения базовых понятий математической физики, умеет находить и анализировать литературу по математической физике, находить и выбирать методы для решения конкретной задачи	Практическое задание

объектов, систем и процессов, обрабатывать и представлять экспериментальные данные	ОПК-2.2 Формулирует задачи экспериментального и теоретического исследования в области радиофизики, использовать радиофизическое измерительное оборудование и применять теоретические методы	Владеет опытом применения базовых знаний математической физики, умеет решать простые практические задачи.	Практическое задание
	ОПК-2.3. Применяет практические навыки радиофизических исследований и представления результатов	Имеет практический опыт применения знаний математической физики при решении задач профессиональной деятельности	Практическое задание

3. Структура и содержание дисциплины

3.1. Трудоемкость дисциплины

	Очная форма обучения
Общая трудоемкость	7 ЗЕТ
Часов по учебному плану	252
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	115
- занятия лекционного типа	48
- занятия семинарского типа	64
- текущий контроль (КСР)	3
самостоятельная работа	92
Промежуточная аттестация – экзамен	45

3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	В том числе				
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы. Из них				Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Консультации	Всего	
	Очная	Очная	Очная	Очная	Очная	Очная
1. Простейшая задача вариационного исчисления. Основная лемма вариационного исчисления. Первая вариация. Уравнение Эйлера. Экстремали. Основные случаи интегрируемости уравнения Эйлера: интеграл энергии (тождество Бельтрами), интеграл импульса и пр. Инвариантность уравнения Эйлера.	6	2	2		4	2
2. Вариационная задача на классе векторных функций. Вариационная задача со старшими производными. Уравнение Эйлера-Пуассона. Вариационная задача на классе функций многих переменных. Уравнение Эйлера-Остроградского.	6	2	2		4	2
3. Вариационные задачи со свободными границами. Условие трансверсальности. Экстремали с угловыми точками. Условия Вейерштрасса-Эрдмана.	6	2	2		4	2
4. Определение нормы и нормированного пространства. Понятие слабого и сильного экстремума. Производная Фреше и производная Гато. Инвариантный интеграл Гильберта. Функция Вейерштрасса. Условие Лежандра. Собственное и центральное поле экстремалей. Условие Якоби. Достаточные условия слабого и сильного экстремума.	6	2	2		4	2
5. Вариационные задачи на условный экстремум. Метод неопределенных множителей Лагранжа. Изопериметрическая задача. Голономные и неголономные связи.	6	2	2		4	2

6. Вариационные принципы физики: принцип Гамильтона. Вывод уравнения поперечных колебаний струны, мембраны с помощью вариационных принципов. Приведение уравнений Эйлера к каноническому виду. Преобразование Лежандра. Уравнение Гамильтона–Якоби.	8	2	2		4	4
7. Вывод основных уравнений математической физики. Уравнение продольных колебаний стержня. Три типа граничных условий для стержня (жесткое закрепление, условие свободного конца, упругое закрепление). Неоднородные граничные условия в задачах о колебаниях стержня. Вывод телеграфных уравнений. Уравнение теплопроводности для стержня. Уравнение диффузии. Распространение тепла в пространстве. Граничные условия для уравнений теплопроводности. Основные задачи, приводящие к уравнениям эллиптического типа.	8	2	2		4	4

<p>8. Системы гиперболических квазилинейных уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными. Метод характеристик. Простейшие уравнения: уравнение переноса и т.д.. Характеристики. Уравнение Хопфа. Градиентная катастрофа. Системы полулинейных уравнений первого порядка. Классификация квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка: гиперболические, строго гиперболические, параболические и эллиптические системы. Уравнения Максвелла как пример гиперболической, но не строго гиперболической системы. Уравнения Коши-Римана как пример эллиптической системы. Приведение гиперболической системы к характеристическому виду. Приведение полулинейной гиперболической системы к виду в инвариантах Римана. Продолженная система системы квазилинейных уравнений гиперболического типа, её приведение к инвариантам Римана. Задача Коши. Альтернативное определение характеристики как кривой, на которой задача Коши не определена или определена не единственным образом. Решение системы телеграфных уравнений для линии без искажений.</p>	17	2	13		15	2
--	----	---	----	--	----	---

<p>9. Уравнения в частных производных второго порядка. Классификация квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Приведение к каноническому виду. Гиперболические уравнения второго порядка. Метод бегущих волн для одномерного волнового уравнения. Вывод формулы Даламбера. Построение решения задачи Коши с помощью фазовой плоскости. Нахождение решения для неоднородного уравнения. Метод продолжений для решения задач для полуограниченной струны. Задача о распространении граничного режима. Задачи для ограниченной струны. Метод функций Римана. Решение телеграфного уравнения линии без искажений методом Даламбера и решение полного телеграфного уравнения методом функций Римана.</p>	32	4	12		16	16
<p>10. Обобщенные функции, обобщенное решение. Обобщенные функции: определения (пространство основных функций) и основные свойства. Дельта функция Дирака. Дельтообразные последовательности. Операции над обобщенными функциями. Свертка. Регуляризация степенных особенностей. Формулы Сохоцкого. Понятие обобщенного решения. Фундаментальное решение. Сверточная алгебра в подпространстве обобщенных функций D'_+. Фундаментальное решение обыкновенного дифференциального уравнения произвольной степени n . Метод спуска. Функция Грина.</p>	10	2	2		4	6

<p>11. Метод Фурье (метод разделения переменных). Метод Фурье для уравнений гиперболического типа. Схема метода разделения переменных на примере задачи о свободных колебаниях струны с жестко закрепленными концами. Связь с теорией рядов Фурье. Задача Штурма-Лиувилля. Обобщенные ряды Фурье (разложения по системе собственных функций задачи Штурма-Лиувилля). Гильбертово пространство. Симметрический оператор. Положительный оператор. Свойства собственных значений и собственных функций. Ортогональность собственных функций. Норма. Ортонормированные системы функций. Теорема Стеклова. Три условия, которым должна удовлетворять система функций для получения классического решения: 1) ортогональность 2) полнота 3) равномерная сходимость. Эквивалентность понятий полноты и замкнутости системы функций. Интерпретация решения, стоячие волны. Общая схема разделения переменных для одномерного однородного уравнения гиперболического типа с однородными граничными условиями. Сведение задачи с неоднородным уравнением и неоднородными граничными условиями к однородному уравнению с неоднородными граничными условиями и к неоднородному уравнению с однородными граничными условиями. Уточнение условий на начальные данные на примере решения с помощью формулы Даламбера. Функция Грина краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. Интегральное уравнение. Счётное множество собственных чисел задачи Штурма-Лиувилля. Постановка начально-краевой задачи для многомерного уравнения гиперболического типа. Метод разделения переменных в многомерном случае. Метод разделения переменных для неоднородного одномерного уравнения гиперболического типа. Неоднородные граничные условия. Оператор Шредингера.</p>	39	6	9		15	24
---	----	---	---	--	----	----

12. Высшие трансцендентные функции. Определение и основные свойства гамма-функции. Уравнение Бесселя. Отыскание решения уравнения Бесселя в виде обобщенного степенного ряда. Общее решение уравнения Бесселя. Цилиндрические функции. Функции Бесселя 1 и 2 рода (функция Неймана). Функции Ганкеля. Модифицированные функции Бесселя 1 и 2 рода. Задача Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя. Ряды Фурье-Бесселя и Дини. Полиномы Лежандра, Эрмита и Лаггера и их основные свойства.	6	2	2		4	2
13. Интегральные преобразования. Обобщенные функции медленного роста. Преобразование Фурье: прямое и обратное преобразования Фурье. Свойства преобразования Фурье. Решение начальной задачи для уравнения теплопроводности методом преобразования Фурье. Применение преобразования Фурье по пространственным переменным к решению задачи Коши для гиперболических уравнений.	6	2	2		4	2
14. Уравнения параболического типа. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности, его свойства. Неоднородное уравнение теплопроводности. Решение начальной задачи в трехмерном пространстве. Решение уравнения теплопроводности на полупрямой. Функция Грина для уравнения теплопроводности на полупрямой. Представление решения простейшей задачи на полупрямой с помощью функции Грина. Постановка смешанной задачи для уравнения теплопроводности в одномерном и многомерном случаях. Решение смешанной задачи методом разделения переменных. Функция Грина смешанной задачи для уравнения теплопроводности. Ее физический смысл. Решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности с помощью функции Грина.	24	8	4		12	12

15. Уравнения эллиптического типа. Корректность по Адамару. Уравнение Лапласа и уравнение Пуассона. Три рода краевых задач для уравнений эллиптического типа. Первая и вторая формулы Грина. Гармонические функции и их свойства. Функция Грина внутренней задачи Дирихле. Ее свойства, физическая интерпретация. Интегральное представление решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона с помощью функции Грина. Метод электростатических отображений построения функции Грина. Решения задач Дирихле для уравнения Лапласа в верхнем полупространстве и внутри шара. Функция Грина задачи Неймана и третьей краевой задачи. Объемный и поверхностные потенциалы: определения и основные свойства. Гауссов потенциал. Применение потенциалов для решения краевых задач. Сведение краевых задач к интегральным уравнениям.	24	8	6		14	10
КСР	3	0	0	3	3	0
Контроль (экзамен)	45	0	0	0	0	0
Итого	252	48	64	3	115	92

Занятия семинарского типа организуются, в том числе в форме практической подготовки.

Практическая подготовка направлена на формирование и развитие знаний, умений и навыков применения современных информационных технологий, в том числе отечественного производства, при решении задач профессиональной деятельности.

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме собеседования, тестирования и практических заданий.

Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (зачет).

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа студента при изучении дисциплины «Методы математической физики» включает выполнение практических заданий под контролем преподавателя и подготовку к зачету.

Контрольные и тестовые вопросы, практические задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю),

включающий:

5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	Удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	Не зачтено		Зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.

<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми и ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами.	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач.

Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»

	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

Критерий оценивания ответов на типовые контрольные вопросы для собеседования и вопросы к зачету

Результаты ответа	Оценка
Студент дал развернутый ответ на все вопросы.	Зачтено
Студент ответил только на часть вопросов или дал неразвернутый ответ на все вопросы.	не зачтено

Критерий оценивания практических заданий

Результаты работы	Оценка
Все практические задания выполнены в полном объеме и в срок. Описание всех этапов выполнения заданий, код и результаты работы представлены преподавателю.	зачтено
Выполнены не все практические задания или выполнены не в полном объеме (представлено не полное описание этапов выполнения заданий, код работает некорректно, результаты работы не представлены преподавателю).	не зачтено

Шкала оценки результатов тестирования

Баллы, %	Оценка сформированности компетенции
80-100	Зачтено
0-79	не зачтено

5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

5.2.1. Вопросы к экзамену по дисциплине «Методы математической физики»

Вопрос	Код компетенции
1. Сформулировать утверждение основной леммы вариационного исчисления.	ОПК-1
2. Что такое функционал?	ОПК-1
3. Написать уравнение Эйлера для простейшей задачи вариационного исчисления	ОПК-1
4. Дать определение первой вариации (производной Гато).	ОПК-1
5. Что такое экстремаль?	ОПК-1
6. Необходимое условие экстремума функционала в простейшей задаче вариационного исчисления.	ОПК-1
7. Случай интегрируемости уравнения Эйлера.	ОПК-1
8. Вариационная задача со старшими производными. Уравнение Эйлера-Пуассона.	ОПК-1
9. Вариационная задача на классе функций многих переменных. Уравнение Эйлера-Остроградского.	ОПК-1
10. Условие трансверсальности в вариационной задаче со свободной (-ыми) границей (-ами).	ОПК-2
11. Принцип Гамильтона. Вывод уравнения колебаний струны.	ОПК-2
12. Вывод телеграфных уравнений.	ОПК-2
13. Как определяется тип системы уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными?	ОПК-2
14. Что такое квазилинейное уравнение?	ОПК-2
15. Дать определение характеристики системы гиперболических уравнений	ОПК-2
16. Что такое градиентная катастрофа	ОПК-2
17. Что входит в понятие корректной задачи по Адамару?	ОПК-2

5.2.2. Типовые контрольные вопросы для оценки сформированности компетенции ОПК-1

На собеседовании проверяется, как студент освоил основные понятия. Он должен уметь давать развернутый ответ на следующие вопросы.

1. Уравнение Эйлера для простейшей задачи (задачи с закрепленными концами) вариационного исчисления.
2. Основная лемма вариационного исчисления.
3. Первая вариация (производная Гато).
4. Понятие слабого и сильного экстремума.

5.2.3. Типовые практические задания для оценки сформированности компетенции ОПК-1

Практические задания направлены на формирование и контроль у обучающихся индикаторов компетенций ОПК-1.2, ОПК-1.3.

1. Используя формулу Даламбера, найти решение задачи:

$$U_{tt} = U_{xx} + \sin x, \quad U|_{t=0} = x, \quad U_t|_{t=0} = x$$

2. Определить решение начальной задачи для однородного волнового уравнения в точке $x=\pi/2$. Начальные функции имеют вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| < \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}, \quad \psi(x) = \begin{cases} V_0, & |x| < \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$$

3. Построить профиль полуограниченной струны с жестко закрепленным концом $x=0$ в момент времени $t=5c/2a$, если начальное отклонение отлично от нуля только на интервале $(c, 4c)$ и имеет форму ломаной с вершинами в точках $(c,0), (2c,2h), (3c,h), (4c,0)$. Начальная скорость равна нулю. Найти формулы, представляющие закон движения точки $x=5c/2$.

5.2.4. Типовые вопросы для оценки сформированности компетенции ОПК-2

1. Пространство основных (пробных) функций. Носитель.
2. Определение обобщенной функции. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Примеры.
3. Действия с обобщенными функциями.

5.2.5. Типовые практические задания для оценки сформированности компетенции ОПК-2

1. Доказать, что функция $\mathcal{E}(x)$ является фундаментальным решением оператора:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x) &= \theta(x) e^{\pm ax}, & \frac{d}{dx} \mp a; \\ \mathcal{E}(x) &= \theta(x) \frac{\sin ax}{a}, & \frac{d^2}{dx^2} + a^2; \\ \mathcal{E}(x) &= \theta(x) \frac{\sinh ax}{a}, & \frac{d^2}{dx^2} - a^2; \end{aligned}$$

2. Решить краевую задачу, предварительно найдя функцию Грина

$$y''(x) = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. - М.: Наука, 1957(7), 1965(2), 1969(17), 2002(86).
<https://djvu.online/download/OaLas8wGhNoGZ>
2. Тихонов А.М., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1971(75). <https://djvu.online/download/XY0Zgytes78pt> — доступ свободный.

3. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. - М.: Наука, 1984(35), 1974(31) <https://djvu.online/download/rmBTztc7oG4gZ>
4. Годунов С.К., Золотарева Е.В. Сборник задач по уравнениям математической физики Новосибирск, 1974 <https://djvu.online/download/we2Xh1fWGQhBw>
5. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1981(13), 1988(34). <https://djvu.online/download/Ivrjw0ZJiMx7l> — доступ свободный
6. Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Минск, 1974. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm> — доступ свободный.

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы

Фонд образовательных электрон. ресурсов ННГУ

<http://www.unn.ru/books/resources>

Библиотека Eqworld (<http://eqworld.ipmnet.ru/>)

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой (лекционного типа), оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО – бакалавриат по направлению подготовки 03.03.03 Радиофизика, утвержденного приказом Министерства науки и высшего образования РФ от 7 августа 2020 г. N 912.

Составитель: И.Н. Солдатов

Заведующий кафедрой «Математические методы в радиофизике» А.А. Дубков

Программа одобрена на заседании методической комиссии радиофизического факультета/института от «25» мая 2023 года, протокол № 04/23.