

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол № 12 от 26.12.2023 г.

Рабочая программа дисциплины

Теория вероятностей и математическая статистика

Уровень высшего образования
Бакалавриат

Направление подготовки / специальность
15.03.03 - Прикладная механика

Направленность образовательной программы
Инженерное приложение суперкомпьютерного моделирования

Форма обучения
очная

г. Нижний Новгород

2024 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.22 Теория вероятностей и математическая статистика относится к обязательной части образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ОПК-1: Способен применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности;	ОПК-1.1: Демонстрирует знание основ проведения работ с применением естественнонаучных и общетехнических знаний, методов математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности ОПК-1.2: Демонстрирует умение применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности ОПК-1.3: Владеет методикой проведения работ с применением естественнонаучных и общетехнических знаний, методов математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности	ОПК-1.1: Знать: основы проведения работ с применением естественнонаучных и общетехнических знаний, методов математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности. ОПК-1.2: Уметь: применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности ОПК-1.3: Владеет методикой проведения работ с применением естественнонаучных и общетехнических знаний, методов математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности	Задания	Экзамен: Контрольные вопросы Задания Зачёт: Контрольные вопросы Задания

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	5
Часов по учебному плану	180
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	48
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	48
- КСР	3
самостоятельная работа	45
Промежуточная аттестация	36 Экзамен, Зачёт

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0
Случайные события. Вероятностное пространство .свойства вероятностной меры. Способы задания вероятностной меры.	12	4	6	10	2
Уловная вероятность. Формулы умножения, сложения, полной вероятности, Байеса. Независимые события. Примеры.	10	2	6	8	2
Схема независимых испытаний Бернулли. Формула Бернулли. Теорема Пуассона. Понятие о теореме Муавра – Лапласа. Применения.	12	4	6	10	2
Дискретные случайные величины. Распределения: Биномиальное, Пуассоновское, геометрическое распределение, отрицательно-биномиальное.	10	2	6	8	2
Общее определение случайных величин. Функция распределения случайных величин, ее свойства. Понятие о теоремах Лебега. Типы распределений. Абсолютно непрерывные с.в. Плотность распределения с.в., ее свойства. Примеры распределений: равномерное, нормальное, экспоненциальное, гамма распределение.	16	4	8	12	4
Случайный вектор, его распределение. Свойства функции распределения случайного вектора. Типы случайных векторов. Маргинальные распределения векторов. Примеры дискретных и абсолютно непрерывных случайных векторов.	7	3	1	4	3
Числовые характеристики случайных величин. Математическое ожидание, дисперсия, ковариация случайных величин и векторов. Их свойства. Примеры для стандартных распределений.	6	2	1	3	3
Последовательности случайных величин, пределы и признаки сходимости .	6	2	1	3	3
Законы больших чисел (теоремы Бернулли, Чебышева). Центральная	6	2	1	3	3

предельная теорема (теорема Ляпунова, Муавра – Лапласа).					
Эмпирическая функция распределения , понятие о теореме Гливенко. Выборочные моменты случайных величин.	6	2	1	3	3
Оценка параметров распределения. Методы моментов и максимального правдоподобия. Качество точечных оценок .Доверительные интервалы. Качество оценок.	6	2	1	3	3
Элементы теории проверки статистических гипотез. Уровень значимости. Ошибки первого и второго рода. Критерий хи - квадрат Пирсона, Критерий отношения правдоподобия.	7	3	2	5	2
Основные определения теории случайных процессов. Примеры процессов: Гальтона-Ватсона ветвящиеся процессы, вероятность вырождения, процесс восстановления, уравнение восстановления для функции восстановления, Процесс Пуассона (неоднородный), процесс винеровский. Применения процессов.	7	3	2	5	2
Классы моделей процессов. Стационарные, гауссовские, с независимыми приращениями, мартингалы, марковские процессы.	5	2	1	3	2
Непрерывность и дифференцируемость траекторий случайных процессов. Критерии таких свойств. Примеры.	6	2	1	3	3
Интегрирование в среднем квадратическом случайных процессов. Критерий существования интегралов от случайных процессов. Примеры применения Разложение в среднем квадр. процессов. Интегрирование по процессам с ортогональными приращениями. Спектральное представление стационарных процессов.	5	2	1	3	2
Интеграл Ито, дифференциал Ито. Формула замены переменных Ито. Понятие и примеры стохастических дифференциальных уравнений Ито. Примеры применений уравнений Ито. Понятие о фильтрации Каллмана - Бьюси, применение интегралов в задачах финансовой математики.	5	2	1	3	2
Интеграл Ито, дифференциал Ито. Формула замены переменных Ито. Понятие и примеры стохастических дифференциальных уравнений Ито. Примеры применений уравнений Ито. Понятие о фильтрации Каллмана - Бьюси, применение интегралов в задачах финансовой математики.	9	5	2	7	2
Аттестация	36				
КСР	3			3	
Итого	180	48	48	99	45

Содержание разделов и тем дисциплины

Случайные события. Вероятностное пространство .свойства вероятностной меры. Способы задания вероятностной меры.

Уловная вероятность. Формулы умножения, сложения, полной вероятности, Байеса. Независимые события. Примеры.

Схема независимых испытаний Бернулли. Формула Бернулли. Теорема Пуассона. Понятие о теореме Муавра – Лапласа. Применения.

Дискретные случайные величины. Распределения: Биномиальное, Пуассоновское, геометрическое распределение, отрицательно- биномиальное.

Общее определение случайных величин. Функция распределения случайных величин, ее свойства. Понятие о теоремах Лебега. Типы распределений. Абсолютно непрерывные с.в. Плотность распределения с.в., ее свойства. Примеры распределений: равномерное, нормальное, экспоненциальное, гамма распределение.

Случайный вектор, его распределение. Свойства функции распределения случайного вектора. Типы случайных векторов. Маргинальные распределения векторов. Примеры дискретных и абсолютно непрерывных случайных векторов.

Числовые характеристики случайных величин. Математическое ожидание, дисперсия, ковариация случайных величин и векторов. Их свойства. Примеры для стандартных распределений.

Последовательности случайных величин, пределы и признаки сходимости.

Законы больших чисел (теоремы Бернулли, Чебышева). Центральная предельная теорема (теорема Ляпунова, Муавра – Лапласа).

Эмпирическая функция распределения, понятие о теореме Гливенко. Выборочные моменты случайных величин.

Оценка параметров распределения. Методы моментов и максимального правдоподобия. Качество точечных оценок. Доверительные интервалы. Качество оценок.

Элементы теории проверки статистических гипотез. Уровень значимости. Ошибки первого и второго рода. Критерий хи-квадрат Пирсона, Критерий отношения правдоподобия.

Основные определения теории случайных процессов. Примеры процессов: Гальтона-Ватсона ветвящиеся процессы, вероятность вырождения, процесс восстановления, уравнение восстановления для функции восстановления, Процесс Пуассона (неоднородный), процесс винеровский. Применения процессов.

Классы моделей процессов. Стационарные, гауссовские, с независимыми приращениями, мартингалы, марковские процессы.

Непрерывность и дифференцируемость траекторий случайных процессов. Критерии таких свойств. Примеры.

Интегрирование в среднем квадратическом случайных процессов. Критерий существования интегралов от случайных процессов. Примеры применения Разложение в среднем квадр. процессов.

Интегрирование по процессам с ортогональными приращениями. Спектральное представление стационарных процессов.

Интеграл Ито, дифференциал Ито. Формула замены переменных Ито. Понятие и примеры стохастических дифференциальных уравнений Ито. Примеры применений уравнений Ито. Понятие о фильтрации Калмана - Бьюси, применение интегралов в задачах финансовой математики.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Виды самостоятельной работы студентов: проработка лекционного материала, выполнение домашних заданий, подготовка к промежуточной аттестации.

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:

Пример 1. Автомат, работающий со стандартным отклонением

= 1.5 г, фасует чай в пакеты со средним весом $a = 80$ г. В случайной выборке

объема $n = 16$ пачек средний вес 78,5 г. Надо ли отрегулировать автомат? Доверительная вероятность $p = 0.99$.

Пример 2. Станок, работающий со стандартным отклонением $= 0,5$ мм, производит детали средней длины $a = 20$ мм. В случайной выборке объема $n = 16$ деталей средняя длина $= 19,8$ мм. Правильно ли настроен станок? Доверительная вероятность $p = 0.99$.

Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответ полный и правильный на основании изученной теории; теоретический материал и решение поставленных задач изложены в необходимой логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный. Могут быть допущены две-три несущественные ошибки, исправленные по требованию преподавателя.
не зачтено	Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные	Продемонстрированы все основные умения. Решены все	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи.

	отказа обучающегося от ответа	место грубые ошибки	негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	основные задачи с отдельным и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

1. Многомерный случайный вектор. Типы распределений. Многомерная функция распределения и ее свойства
2. Маргинальные распределения векторов. Примеры многомерных дискретных и непрерывных распределений.
3. Математическое ожидание и дисперсия. Их свойства
4. Ковариация и коэффициент корреляции. Их свойства.
5. Виды сходимости случайных последовательностей.
6. Законы больших чисел (теоремы Чебышева и Бернулли).
7. Центральная предельная теорема (теорема Ляпунова, Муавра – Лапласа).
8. Эмпирическая функция распределения , понятие о теореме Гливенко.
9. Выборочные моменты случайных величин. Их свойства
10. Метод максимального правдоподобия для оценки параметров. Примеры
11. Метод моментов для оценки параметров. Примеры.
12. Качество точечных оценок параметров. Примеры.
13. Доверительные интервалы. Примеры.
14. Статистическая гипотеза, статистический критерий, уровень значимости, мощность критерия.
15. Критерий согласия хи-квадрат Пирсона.
16. Критерий отношения правдоподобия.
17. Случайные события. Операции над событиями. Алгебра и сигма-алгебра событий.
18. Вероятностное пространство. Свойства вероятностной меры.
19. Способы задания вероятностной меры.
20. Условная вероятность. Теоремы умножения. Независимость событий.
21. Основные теоремы о вероятностях: теорема сложения, формула полной вероятности
22. Схема независимых испытаний Бернулли. Формула Бернулли.
23. Схема независимых испытаний Бернулли. Теорема Пуассона. Теорема Муавра-Лапласа.
24. Типовые дискретные случайные величины
25. Типовые непрерывные случайные величины

26. Общее определение случайной величины. Функция распределения и ее свойства.
27. Случайные процесс и его конечномерные распределения. Теорема Колмогорова
28. Стационарные, гауссовские, с независимыми приращениями, мартингалы, марковские процессы
29. Непрерывность траекторий случайного процесса. Критерии, примеры
30. Дифференцируемость траектории случайного процесса. Критерии, примеры.
31. Интегрирование в среднем квадратичном случайного процесса. Критерии интегрируемости. Примеры
32. Интегрирование по процессам с ортогональными приращениями. Спектральное представление случайных процессов
33. Определение и свойства интеграла Ито
34. Понятие и примеры стохастических дифференциальных уравнений Ито

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки
отлично	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок
очень хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок
хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок
удовлетворительно	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибки.
неудовлетворительно	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.
плохо	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа

5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

1. Сформулируйте аксиомы выбора элементарных исходов.
2. Докажите основные свойства операций над случайными событиями
3. Сформулируйте классическое определение вероятности
4. Сформулируйте геометрическое определение вероятности.
5. Сформулируйте определение условной вероятности.
6. Докажите теорему умножения вероятностей для двух исходов.
7. Докажите теорему умножения для n событий ($n \geq 3$)
8. Дайте определение независимости двух событий
9. Докажите теорему сложения вероятностей для двух событий
10. Дайте определение независимости n событий ($n \geq 3$)
11. Докажите формулу Бернулли.
12. Сформулируйте и докажите теорему Пуассона.

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок
не зачтено	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.

5.3.3 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

Пример 1. Производитель утверждает, что средний вес плитки шоколада не меньше $a = 50$ гр. Инспектор отобрал 10 плиток шоколада и взвесил. Их вес оказался 49,50, 51,52,48,47,49,52,48,51 г соответственно. Не противоречит ли это утверждению производителя? Предполагается, что вес плитки шоколада распределен нормально. Доверительная вероятность $p = 0.95$.

Пример 2. Проверить по выборке (табл.1) гипотезу о том, что дисперсия генеральной совокупности равна 5. Доверительная вероятность $p = 0.95$.

Табл.1

4.3 5	2.9 3	- 2.3 6	- 1.5 5
1.0 4	0.4 5	- 0.0 6	5.0 1
2.0 4	- 0.2 7	0.5 9	3.7 6
- 1.8 7	- 0.8 6	3.3 2	2.5 8
- 3.2 6	3.2 9	- 1.0 3	2.9

Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки
отлично	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок
очень хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок
хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок
удовлетворительно	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибки.
неудовлетворительно	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.
плохо	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа

5.3.4 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

Пример 1. Система, состоящая из двух работающих независимо друг от друга устройств, функционирует исправно только при одновременной работе этих устройств. Вероятности работы 1-го и 2-го устройств равны соответственно 0,8 и 0,9. Какова вероятность функционирования системы в целом?

Пример 2. Из урны, в которой находятся 8 белых и 12 черных шаров, последовательно вынимают два шара и обратно не возвращают. Событие А - {1-й вынутый шар черный}, событие В = {2-й вынутый шар черный}. Выяснить, зависимы ли события А и В.

Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок
не зачтено	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Федоткин Михаил Андреевич. Основы прикладной теории вероятностей и статистики : учеб. для студентов вузов, обучающихся по специальности "Прикладная математика и информатика" и по направлению "Прикладная математика и информатика". - М. : Высшая школа, 2006. - 368 с. : ил. - ISBN 5-06-005328-8 : 215.60., 183 экз.

Дополнительная литература:

1. Ширяев Альберт Николаевич. Вероятность : [учеб. пособие для вузов по специальностям "Математика", "Приклад. математика", "Физика"]. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Наука, 1989. - 640 с. : ил. - ISBN 5-02-013955-6 (в пер.) : 1.70., 86 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

.

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки/специальности 15.03.03 - Прикладная механика.

Автор(ы): Тихов Михаил Семенович, доктор физико-математических наук, профессор.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 10.10.2023 г., протокол № 2.