

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол № 15 от 24.12.2025 г.

Рабочая программа дисциплины

Компьютерное моделирование вероятностных процессов

Уровень высшего образования
Бакалавриат

Направление подготовки / специальность
01.03.02 - Прикладная математика и информатика

Направленность образовательной программы
Математическое моделирование и искусственный интеллект

Форма обучения
очная

г. Нижний Новгород

2026 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.ДВ.05.04 Компьютерное моделирование вероятностных процессов относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-13: Способен участвовать в исследовании математических моделей в естественных науках и технике	<p>ПК-13.1: Знает методы создания, анализа и исследования математических моделей в естественных науках и технике</p> <p>ПК-13.2: Знает математические методы обработки информации, полученной в результате экспериментальных исследований</p> <p>ПК-13.3: Умеет корректно использовать методы создания, анализа и исследования математических моделей, умеет применять численные и аналитические методы решения базовых математических задач и классических задач естествознания в практической деятельности</p> <p>ПК-13.4: Владеет навыками использования математических методов обработки информации, полученной в результате экспериментальных исследований</p>	<p>ПК-13.1:</p> <p>Знать:</p> <ul style="list-style-type: none"> -базовые понятия теории вероятностей и математической статистики; -законы распределения вероятностей, наиболее распространенных на практике дискретных и непрерывных случайных величин; -определение и назначение модели, приемы моделирования, типы математических моделей. <p>ПК-13.2:</p> <p>Знать:</p> <ul style="list-style-type: none"> -методы обработки и способы представления результатов повторных независимых наблюдений над случайными величинами; -алгоритмы моделирования реализаций случайных величин с известными законами распределения вероятностей; -алгоритм моделирования стационарного случайного процесса. <p>ПК-13.3:</p> <p>Уметь:</p> <ul style="list-style-type: none"> -формулировать содержательные проблемы в 	Задания Аудиторная контрольная работа	Экзамен: Контрольные вопросы

		<p>форме вероятностных и статистических задач; -строить вероятностные модели реальных случайных явлений (для определенного круга задач); -находить различные вероятностные характеристики случайных величин и неслучайных функций от случайных аргументов; -разрабатывать и применять алгоритмические и программные решения при моделировании многоэтапных случайных экспериментов, моделировании реализаций случайных величин и случайных процессов.</p> <p>ПК-13.4: Владеть: техникой вычисления вероятностей сложных событий (с использованием теорем сложения и умножения вероятностей, формулы полной вероятности и формулы Байеса); методами анализа и обработки результатов наблюдений над случайными величинами; методами оценивания неизвестных законов распределений по результатам повторных независимых наблюдений над случайными величинами; методами моделирования реализаций случайных величин с известными законами распределения вероятностей с применением языка Python; навыками применения программных средств для решения статистических задач о распределении неслучайных функций от случайных аргументов.</p>		
--	--	--	--	--

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	3
Часов по учебному плану	108
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	16
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	32
- КСР	2
самостоятельная работа	22
Промежуточная аттестация	36 Экзамен

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
Тема 1. Определение и назначение модели, приемы моделирования	6	2		2	4
Тема 2. Математическое моделирование, типы математических моделей.	10	2	4	6	4
Тема 3. Имитационное моделирование.	16	4	8	12	4
Тема 4. Методы моделирования случайных величин.	24	6	12	18	6
Тема 5. Методы моделирования стационарных случайных процессов.	14	2	8	10	4
Аттестация	36				
КСР	2			2	
Итого	108	16	32	50	22

Содержание разделов и тем дисциплины

Тема 1. Определение и назначение модели, приемы моделирования. Материальное моделирование: физическое моделирование, аналоговое моделирование. Определения, примеры. Общая характеристика и классификация моделей. Определения, примеры.

Тема 2. Математическое моделирование, типы математических моделей. Определение и примеры дескриптивных моделей. Общая структура и примеры построения оптимизационных моделей.

Многокритериальные модели. Определение, примеры.

Тема 3. Имитационное моделирование. Методы имитационного моделирования. Построение модели. Введение в программирование Python. Программирование, ориентированное на массивы. Визуализация данных, библиотека Matplotlib. Научные расчеты, модуль статистики библиотеки SciPy.

Метод статистических испытаний (Метод Монте-Карло), примеры его применения.

Тема 4. Методы моделирования случайных величин. Физические датчики случайных чисел.

Программные методы моделирования реализаций случайных величин с заданными законами распределения вероятностей с применением библиотеки научных расчетов SciPy. Некоторые алгоритмы моделирования реализаций случайной величины с равномерным на интервале (0,1) распределением. Метод обратной функции как способ моделирования реализаций непрерывной случайной величины с известной функцией распределения. Метод исключения для моделирования случайной величины с показательным распределением. Некоторые алгоритмы моделирования случайной величины со стандартным нормальным распределением. Алгоритм моделирования реализаций случайной величины с распределением хи-квадрат. Способы моделирования реализаций случайной величины с биномиальным распределением. Алгоритм моделирования реализаций случайной величины с распределением Пуассона. Математическое моделирование эксперимента д-ра Э.Деминга «Воронка и мишень» методом Монте-Карло.

Тема 5. Методы моделирования стационарных случайных процессов. Определение случайного процесса. Некоторые характеристики случайного процесса (конечномерные функции распределения, математическое ожидание, дисперсия, автоковариационная функция). Определения стационарного случайного процесса (в широком и строгом смысле). Компьютерное моделирование вероятностных процессов в инженерных приложениях и бизнесе.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ПК-13:

Задание 1. 15 экзаменационных билетов содержат по два вопроса, которые не повторяются.

Билет берет студент, который знает только 25 вопросов. Для успешной сдачи экзамена достаточно ответить на два вопроса из своего билета или на один вопрос из своего билета и на указанный дополнительный вопрос из другого билета. Повторить эксперимент (путем моделирования) N раз в одних и тех же условиях и найти относительную частоту события $A = \{\text{студент сдаст экзамен}\}$. Найти вероятность события A теоретически.

Задание 2. Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, P) определены две независимые случайные величины ξ и η , каждая из которых равномерно распределена на интервале $(4,7)$. Вводится новая случайная величина $\zeta = \xi + \eta$. Путем моделирования реализаций случайных величин и получить N наблюдений над случайной величиной ζ . По N наблюдениям построить эмпирическую функцию распределения и гистограмму относительных частот группированной выборки. Найти плотность распределения теоретически.

Задание 3.

1. Реализовать 2 метода Монте-Карло для подсчета определенного интеграла вида

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

2. Посчитать точное аналитическое значение интеграла.

3. Провести серию из увеличивающегося количества испытаний и вывести результаты сравнения приближенного и аналитического решения задачи в форме таблицы.

4. Вывести на экран графическое представление 1-го метода Монте-Карло для заданного количества испытаний.

5. Реализовать 2 метода Монте-Карло для подсчета определенного интеграла вида

$$I = \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$$

6. Посчитать точное аналитическое значение интеграла.

7. Провести серию из увеличивающегося количества испытаний и вывести результаты сравнения приближенного и аналитического решения задачи в форме таблицы и графически.

В качестве функций $f(x)$ и $f(x, y, z)$ и соответствующих областей выбрать любые функции, для которых интегралы существуют и вычислимы аналитически

Задание 4. Пусть ξ - непрерывная случайная величина с плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 2x^{-2} & , 1 < x < 2 \\ 0 & , x - \text{другое} \end{cases}.$$

Посчитать математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Используя метод обратной функции, получить выражение, позволяющее моделировать реализации случайной величины ξ по реализациям случайной величины v , равномерно распределенной в интервале $(0, 1)$.

Написать программу, решающую следующие задачи:

1) проведение N экспериментов по моделированию случайной величины (N задается с клавиатуры);

2) вывод результатов моделирования в виде вариационного ряда;

3) подсчет и вывод на экран основных статистических характеристик случайной величины (размах выборки, статистические математическое ожидание, медиана и дисперсия).

Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме. Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами. Продемонстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.
не зачтено	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа. При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.

5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Аудиторная контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ПК-13:

Задача. Пусть ξ - непрерывная случайная величина с плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & , x > 0 \\ 0 & , x - \text{другое} \end{cases} .$$

Используя метод обратной функции, получить выражение, позволяющее моделировать реализации случайной величины ξ по реализациям случайной величины v , равномерно распределенной в интервале (0, 1).

Пусть $\eta = \exp(-\xi)$, найти плотность распределения случайной величины η .

Критерии оценивания (оценочное средство - Аудиторная контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена

Оценка	Критерии оценивания
	дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо».
удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно».
неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо».
плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо».

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельным	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном

			все задания, но не в полном объеме	Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	в полном объеме, но некоторые с недочетами	и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-13

1. Построение простейшей дескриптивной модели эпидемии.
2. Построение оптимизационных моделей для некоторых экономических задач.

3. Решение задачи вычисления определенного интеграла методом Монте-Карло.
4. Определение отрезка апериодичности псевдослучайной последовательности чисел, получаемой с помощью смешанного линейного алгоритма.
5. Применение метода обратной функции для моделирования реализаций абсолютно непрерывной случайной величины с заданной функцией распределения.
6. Применение метода исключения для моделирования реализаций случайной величины с показательным распределением.
7. Способы моделирования реализаций случайной величины с биномиальным распределением. Получение реализации случайной величины с биномиальным распределением (при заданных параметрах p и n) по последовательности чисел, представляющих собой независимые реализации случайной величины, равномерно распределенной на интервале $(0,1)$.
8. Получение реализации случайной величины с распределением Пуассона (при заданном параметре λ) по последовательности чисел, представляющих собой независимые реализации случайной величины, равномерно распределенной на интервале $(0,1)$.
9. Алгоритм моделирования случайной величины со стандартным нормальным распределением.
10. Способы моделирования реализаций случайной величины с распределением хи-квадрат.
11. Определение случайного процесса. Некоторые характеристики случайного процесса (конечномерные функции распределения, математическое ожидание, дисперсия, автоковариационная функция).
12. Определения стационарного случайного процесса (в широком и строгом смыслах).

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Федоткин Михаил Андреевич. Основы прикладной теории вероятностей и статистики : учеб. для студентов вузов, обучающихся по специальности "Прикладная математика и информатика" и по направлению "Прикладная математика и информатика". - М. : Высшая школа, 2006. - 368 с. : ил. - ISBN 5-06-005328-8 : 215.60., 183 экз.
2. Федоткин Михаил Андреевич. Модели в теории вероятностей : учебник. - М. : Физматлит : ННГУ, 2012. - 608 с. - (Библиотека Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского). - ISBN 978-5-9221-1384-7 : 600.00., 200 экз.
3. Федоткин Михаил Андреевич. Лекции по анализу случайных явлений : учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по направлениям ВПО 010400 "Приклад. математика и информатика" и 010300 "Фундам. информатика и информ. технологии" / ННГУ. - М. : Физматлит, 2016. - 464 с. - ISBN 978-5-9221-1679-4 : 599.50., 250 экз.

Дополнительная литература:

1. Кнут Д. Э. Искусство программирования : пер. с англ. Т. 2. Получисленные алгоритмы / под ред. Ю. В. Козаченко. - 3-е изд., испр. и доп. - М. : Вильямс, 2000. - 832 с. - ISBN 0-201-89684-2 (англ.) : 335.00., 1 экз.
2. Зорин А. В. Моделирование случайных величин и проверка гипотез о виде распределения : учебно-методическое пособие / Зорин А. В., Зорин В. А., Федоткин М. А. - Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2017. - 19 с. - Рекомендовано методической комиссией Института ИТММ для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 010302 «Прикладная математика и информатика». - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ННГУ им. Н. И. Лобачевского - Математика., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=730085&idb=0>.
3. Сморкалова Валентина Михайловна. Задачи оценивания неизвестных параметров распределений : учебно-методическое пособие / В. М. Сморкалова ; ННГУ им. Н. И. Лобачевского. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2015. - 51 с. - Текст : электронный., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=850170&idb=0>.
4. Мухин В. И. Сборник задач по теории вероятностей. Ч. 3 / В. И. Мухин, В. М.Сморкалова ; ННГУ им. Н. И. Лобачевского. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2017. - 42 с. - Текст : электронный., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=822607&idb=0>.
5. Мухин В. И. Сборник задач по теории вероятностей. Ч. 4 / В. И. Мухин, В. М.Сморкалова ; ННГУ им. Н. И. Лобачевского. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2017. - 54 с. - Текст : электронный., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=822608&idb=0>.
6. Кувыкин В. И. Практические задания по дисциплине «Компьютерное моделирование вероятностных процессов» : учебно-методическое пособие / Кувыкин В. И. - Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2022. - 34 с. - Рекомендовано методической комиссией Института информационных технологий, математики и механики для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» и 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии». - Книга из коллекции ННГУ

им. Н. И. Лобачевского - Информатика., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=830217&idb=0>.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

Anaconda — дистрибутив языков программирования Python и R (<https://anaconda.com/>)

Общероссийский математический портал <http://www.mathnet.ru>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.02 - Прикладная математика и информатика.

Автор(ы): Кувькин Вячеслав Иванович, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник.

Заведующий кафедрой: Зорин Андрей Владимирович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 17.12.2025, протокол № №6.