

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО

решением Ученого совета ННГУ

протокол № 10 от 02.12.2024 г.

Рабочая программа дисциплины

Метод граничных интегральных уравнений

Уровень высшего образования

Магистратура

Направление подготовки / специальность

01.04.02 - Прикладная математика и информатика

Направленность образовательной программы

Математическое моделирование физико-механических процессов

Форма обучения

очная

г. Нижний Новгород

2025 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.06 Метод граничных интегральных уравнений относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-5: Способен разрабатывать и применять математические методы, системное и прикладное программное обеспечение для решения задач научной деятельности	ПК-5.1: Знает типовые математические методы и методологии разработки системного и прикладного программного обеспечения для решения задач научной деятельности ПК-5.2: Умеет применять типовые математические методы и методологии разработки системного и прикладного программного обеспечения для решения задач научной деятельности ПК-5.3: Имеет навыки разработки системного и прикладного программного обеспечения для решения задач научной деятельности	ПК-5.1: Знать основные понятия, математические модели метода граничных интегральных уравнений, современные методы исследования в области решения задач ПК-5.2: Уметь комбинировать и адаптировать современные методы решения прикладных задач на основе знаний фундаментальных математических моделей ПК-5.3: Владеть навыками применения базовых знаний и современного математического аппарата метода граничных интегральных уравнений при решении прикладных задач.	Задачи Контрольная работа Собеседование	Экзамен: Контрольные вопросы Задания

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	3
Часов по учебному плану	108

в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	16
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	16
- КСР	2
самостоятельная работа	38
Промежуточная аттестация	36 Экзамен

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/ лабора- торные работы), часы	Всего	
	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о
Состояние вопроса. Базовые математические модели.	6	2	2	4	2
Матрицы фундаментальных и сингулярных решений.	10	3	3	6	4
Формулы Грина. Метод потенциалов. Граничные интегральные уравнения.	18	4	4	8	10
Гранично-элементная технология. Дискретные аналоги.	18	4	4	8	10
Методы квадратур сверток, интегральных преобразований для ГИУ. Примеры.	18	3	3	6	12
Аттестация	36				
КСР	2			2	
Итого	108	16	16	34	38

Содержание разделов и тем дисциплины

1. Состояние вопроса. Базовые математические модели.
2. Матрицы фундаментальных и сингулярных решений.
3. Формулы Грина. Метод потенциалов. Граничные интегральные уравнения.
4. Гранично-элементная технология. Дискретные аналоги.
5. Методы квадратур сверток, интегральных преобразований для ГИУ. Примеры.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

В рамках дисциплины предусмотрены следующие виды самостоятельной работы (порядок их выполнения, форма контроля):

- повторение материала, пройденного на занятиях лекционного типа (в течение всего семестра, опрос на занятиях лекционного и семинарского типа),
- самостоятельное изучение отдельных вопросов программы (1 раз в семестр, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к занятиям семинарского типа, решение задач по списку, представленному преподавателем (в течение всего семестра, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к промежуточному контролю успеваемости (зачет).

Дополнительная литература:

1. Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Белов А.А. Численное обращение преобразования Лапласа: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский университет, 2010. – 34 с.
http://www.mmf.unn.ru/files/2014/01/Igumnov_LaplaceTransform.pdf
2. Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Белов А.А. Элементы метода граничных интегральных уравнений в решении задач динамической пороупругости: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский университет, 2010. – 43 с.
http://www.mmf.unn.ru/files/2014/01/Igumnov_BoundaryIntegralEquations.pdf
3. Игумнов Л.А., Марков И.П. Применение метода ГИУ для решения краевых динамических упругопластических задач в трехмерной постановке: Электронное методическое пособие. Н.Новгород: Нижегородский госуниверситет. 2011. 21 с.
<http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/124.pdf>
4. Игумнов Л.А., Пазин В.П. Построение матриц Грина и Неймана в трехмерной статической теории упругости с сопряженными полями: Электронное методическое пособие. Н.Новгород: Нижегородский госуниверситет. 2011. 22 с.
<http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/125.pdf>
5. Игумнов Л.А., Петров А.Н. Фундаментальные решения трехмерной динамической теории пороупругости: Электронное методическое пособие. Н.Новгород: Нижегородский госуниверситет. 2011. 23 с. <http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/126.pdf>
6. Игумнов Л.А., Ратаушко Я.Ю. Фундаментальные и сингулярные решения изотропной теории упругости и вязкоупругости: Электронное методическое пособие. Н.Новгород: Нижегородский госуниверситет. 2011. 18 с. <http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/127.pdf>
7. Баженов В.Г., Белов А.А., Игумнов Л.А. Гранично-элементное моделирование динамики кусочно-однородных сред и конструкций: Учебное пособие. Н.Новгород: Изд-во Нижегородского университета. 2009. 180 с. (20 экз.)
8. Белов А.А., Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю. Численное интегрирование быстро осциллирующих функций и его приложения: Учебно-методическое пособие. Н.Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета. 2010. 55 с. (20 экз.)
9. Верюжский Ю.В. Метод потенциала в статических задачах строительной механики. - М.: Наука, 1981. (20 экз.)

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ПК-5:

1. Выведите оператор Набла для в полярных координат r и φ , где соотношения между единичными векторами \hat{e}_r и \hat{e}_φ полярной системы координат и единичными векторами \hat{e}_1 и \hat{e}_2 декартовой системы координат следующие:

$$\hat{e}_1 = \hat{e}_r \cos \varphi - \hat{e}_\varphi \sin \varphi$$

$$\hat{e}_2 = \hat{e}_r \sin \varphi + \hat{e}_\varphi \cos \varphi$$

2. Определить оператор Лапласа, т. е. скалярное произведение вектора набла на самого себя в полярных координатах

3. Вычислите по частям интеграл

$$\int_a^b x^n \ln(x) dx$$

4. Вычислите по частям интеграл в области R^2

$$\int_0^R r^n \ln(r) d\Omega$$

где

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2) \mid r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq R \right\} :$$

Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок
не зачтено	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки

5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ПК-5:

1. Смените порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_a^x \left[\int_s^b G(\bar{x}, s) d\bar{x} \right] ds, \quad x \in [a, b].$$

и проверьте полученное соотношение для случая

$$G(\bar{x}, s) = \bar{x}^3 s.$$

2. Для краевой задачи

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) = f(x)$$

$$y(a) = y_0 \quad \text{and} \quad \left. \frac{d}{dx} y(x) \right|_{x=b} = y'(b) = y'_1$$

выведите решение путем прямого интегрирования и преобразуйте полученный двойной интеграл в одинарные интегралы.

3. Запишите решение системы, соответствующей краевой задаче об изгибе балки,

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & l \\ -1 & -l & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(a) \\ w'(a) \\ w(b) \\ w'(b) \end{bmatrix} = -\frac{1}{2EI} \int_a^b \begin{bmatrix} (x-a)M(x) \\ (b-x)M(x) \end{bmatrix} dx$$

при краевых условиях

$$w(a) = w_0 \quad \text{and} \quad w'(b) = w'_1$$

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок
не зачтено	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки

5.1.3 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции ПК-5:

1. Физические предпосылки метода граничных интегральных уравнений. Свойства потенциалов. Задачи Дирихле и Неймана в и интегральные уравнения для них
2. Исследование интегральных уравнений внутренней задачи Дирихле и внешней -Неймана при .
3. Теория гармонических потенциалов. Спектральные свойства граничных операторов.

4. Метод граничных интегральных уравнений для системы Ламе. Исходные положения теории равновесия изотропного упругого тела. Фундаментальное решение системы Ламе. Потенциалы теории упругости.
5. Метод граничных интегральных уравнений для системы Ламе. Метод граничных интегральных уравнений для системы Ламе. Потенциалы теории упругости и их свойства.

Критерии оценивания (оценочное средство - Собеседование)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок
не зачтено	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатор достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельным и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов

						объеме	
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-5

1. Объемный потенциал, потенциалы простого и двойного слоя.
2. Вывод интегральных уравнений для основных граничных задач теории гармонических функций.
3. Теоремы Фредгольма для вполне непрерывных операторов в гильбертовом пространстве.
4. Интегральные операторы со слабой особенностью.
5. Разрешимость граничных интегральных уравнений для задач Дирихле и Неймана уравнения Лапласа.
6. Спектральные свойства граничных интегральных операторов.
7. Сингулярные интегральные уравнения. Примеры сингулярных интегральных уравнений.

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки
отлично	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок
очень хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок
хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок
удовлетворительно	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок
неудовлетворительно	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки
плохо	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа

5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ПК-5

1. Используя интегральное представление

$$\begin{aligned}
 u(\xi) &= - \left[u'(x)u^*(x, \xi) - u(x) \frac{\partial u^*(x, \xi)}{\partial x} \right]_0^l - \int_0^l \frac{p(x)}{EA} u^*(x, \xi) dx \\
 &= - \frac{1}{2k} \sin k(l - \xi) u'(l) + \frac{1}{2} \cos k(l - \xi) \sin(l - \xi) u(l) \\
 &\quad + \frac{1}{2k} \sin(k\xi) u'(0) - \frac{1}{2} \cos(k\xi) \sin(-\xi) u(0) - \int_0^l \frac{p(x)}{EA} u^*(x, \xi) dx \\
 &= - \frac{1}{2EAk} \sin k(l - \xi) N(l) + \frac{1}{2} \cos k(l - \xi) u(l) \\
 &\quad + \frac{1}{2EAk} \sin(k\xi) N(0) + \frac{1}{2} \cos(k\xi) u(0) - \int_0^l \frac{p(x)}{EA} \frac{1}{2k} \sin(kr) dx
 \end{aligned}$$

и

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\cos(kl) & \sin(kl) \\ -\cos(kl) & -\sin(kl) & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ \frac{N(0)}{EAk} \\ u(l) \\ \frac{N(l)}{EAk} \end{bmatrix} = - \frac{1}{EAk} \int_0^l \begin{bmatrix} p(x) \sin(kx) \\ p(x) \sin k(l - x) \end{bmatrix} dx$$

записать решение для граничных функций в задаче о действии крутящего момента $M_T(x)$ на упругий стержень длины l , описываемой уравнением

$$\frac{d^2\vartheta(x)}{dx^2} - h^2\vartheta(x) = -\frac{M_T(x)}{EC_T}$$

2. Запишите функция Грина для задачи об изгибе упругой балки, описываемой уравнением

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = q(x)$$

если балка жестко закреплена на обоих концах.

3. Запишите функцию Грина для задачи об изгибе упругой балки, описываемой уравнением

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = q(x)$$

если балка жестко закреплена на конце $x=0$, а конец $x=l$ свободен.

Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки
отлично	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок
очень хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок
хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок
удовлетворительно	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок
неудовлетворительно	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки
плохо	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить

Оценка	Критерии оценивания
	полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями / Баженов В.Г., Игумнов Л.А. - Москва : Физматлит, 2008., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=645914&idb=0>.

Дополнительная литература:

1. Бреббиа Карл. Методы граничных элементов / пер. с англ. Л. Г. Корнейчука ; под ред. Э. И. Григолюка. - М. : Мир, 1987. - 524 с. ил. - 3.60., 3 экз.
2. Партон Владимир Залманович. Интегральные уравнения теории упругости. - М. : Наука, 1977. - 311 с. : ил. - 1.60., 1 экз.
3. Рябенский Виктор Соломонович. Метод разностных потенциалов для некоторых задач механики сплошных сред. - М. : Наука, 1987. - 319, [1] с. : ил. - 3.70., 2 экз.
4. Угодчиков Андрей Григорьевич. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. - Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1986. - 294, [1] с. : граф. - 3.00., 28 экз.
5. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями / Баженов В.Г., Игумнов Л.А. - Москва : Физматлит, 2008., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=645914&idb=0>.
6. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики / под ред. В. И. Смирнова, Х. Л. Смолицкого. - [Б. м.] : [б. и.], [19--]. - 416 с. - 13.15., 1 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

1. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library.htm>
2. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ie.htm>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами, специализированным оборудованием: проектор, экран

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.04.02 - Прикладная математика и информатика.

Автор(ы): Игумнов Леонид Александрович, доктор физико-математических наук, профессор.

Заведующий кафедрой: Игумнов Леонид Александрович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 02.12.2024, протокол № 5.