

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования\_  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совета ННГУ

протокол № 1 от 16.01.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Теория меры

---

Уровень высшего образования

Бакалавриат

---

Направление подготовки / специальность

01.03.02 - Прикладная математика и информатика

---

Направленность образовательной программы

Прикладная математика и информатика (общий профиль)

---

Форма обучения

очная

---

г. Нижний Новгород

2024 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.ДВ.12.01 Теория меры относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-13: Способен участвовать в исследовании математических моделей в естественных науках и технике	<p>ПК-13.1: Знает методы создания, анализа и исследования математических моделей в естественных науках и технике</p> <p>ПК-13.2: Знает математические методы обработки информации, полученной в результате экспериментальных исследований</p> <p>ПК-13.3: Умеет корректно использовать методы создания, анализа и исследования математических моделей, умеет применять численные и аналитические методы решения базовых математических задач и классических задач естествознания в практической деятельности</p> <p>ПК-13.4: Владеет навыками использования математических методов обработки информации, полученной в результате экспериментальных исследований</p>	<p>ПК-13.1: Знать базовые понятия курса: измеримое пространство, измеримое множество, функция множества, мера, положительная мера, вероятностная мера, сосредоточенная мера, абсолютно непрерывная мера. Измеримая функция интеграл Лебега</p> <p>ПК-13.2: Знать методы использования теории меры при решении математических и прикладных проблем</p> <p>ПК-13.3: Уметь находить меру множества, вычислять интеграл Лебега. Уметь применять теорию меры при решении научных задач математического моделирования.</p> <p>ПК-13.4: Владеть приемами и навыками, предполагающими использования аппарата меры в решении прикладных задач</p>	<p>Задания</p> <p>Собеседование</p>	<p>Зачёт:</p> <p>Контрольные вопросы</p>

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	2
Часов по учебному плану	72
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	24
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	24
- КСР	1
самостоятельная работа	23
Промежуточная аттестация	0 Зачёт

#### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	0 ф 0	0 ф 0	0 ф 0	0 ф 0	0 ф 0
Тема 1. Введение. Открытые и замкнутые множества на прямой	4	2	2	4	0
Тема 2. Мера открытого множества на прямой	7	2	2	4	3
Тема 3. Внешняя и внутренняя меры. Мера множества на прямой	7	2	2	4	3
Тема 4. Измеримые функции	7	2	2	4	3
Тема 5. Интеграл Лебега	11	4	4	8	3
Тема 6. Функции с ограниченным изменением. Функции скачков, сингулярные и абсолютно непрерывные функции. Общий вид меры множества на прямой. Плотность меры	11	4	4	8	3
Тема 7. Общее определение меры. Конечная мера, положительная мера, сосредоточенная мера, абсолютно непрерывная мера. Борелевская мера. Регулярная мера. Мера Радона. Мера Дирака. Теоремы Радона-Никодима, Рисса, Сакса	12	4	4	8	4
Тема 8. Дифференциальные уравнения в семействах мер и их приложения в математическом моделировании	12	4	4	8	4
Аттестация	0				
КСР	1				1
Итого	72	24	24	49	23

## Содержание разделов и тем дисциплины

Тема 1. Введение. Открытые и замкнутые множества на прямой.

История теории меры. Приложения. Точечные множества на прямой. Классификация точек множества. Открытые и замкнутые множества.

Тема 2. Мера открытого множества на прямой.

Свойства открытых и замкнутых множеств. Понятие топологического пространства. Структура открытых и замкнутых множеств на прямой. Мера промежутка. Мера открытого множества.

Аддитивность меры. Мера замкнутого множества.

Тема 3. Внешняя и внутренняя меры. Мера множества на прямой.

Мера Жордана линейных и плоских множеств. Критерий квадратуемости. Внешняя и внутренняя меры линейного множества, свойства. Критерий измеримости. Свойства меры.

Тема 4. Измеримые функции.

Измеримые функции, примеры. Свойства измеримых функций. Последовательности измеримых функций.

Тема 5. Интеграл Лебега.

Интеграл Римана. Суммы Дарбу. Интегральная сумма Лебега. Критерии интегрируемости. Свойства интеграла. Связь интегралов Римана и Лебега.

Тема 6. Функции с ограниченным изменением. Функции скачков, сингулярные и абсолютно непрерывные функции. Общий вид меры множества на прямой. Плотность меры.

Тема 7. Общее определение меры. Конечная мера, положительная мера, сосредоточенная мера, абсолютно непрерывная мера. Борелевская мера. Регулярная мера. Мера Радона. Мера Дирака. Теоремы Радона-Никодима, Рисса, Сакса

Тема 8. Дифференциальные уравнения в семействах мер и их приложения в математическом моделировании.

Задача Коши в банаховом пространстве. Решения дифференциального уравнения со специальной правой частью в семействе положительных мер.

## 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:

- электронный курс "Теория меры" (<https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=9729>).

## 5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ПК-13:

1. Объясните, какова структура открытых и замкнутых множеств на прямой? Приведите примеры.

2. Объясните, как определяется мера открытого и замкнутого множества на прямой? Приведите примеры
3. Каковы основные свойства меры открытых множеств на прямой? Приведите примеры.
4. Чему равна мера канторова совершенного множества?
5. Что такое внешняя мера? Какое множество называется измеримым на единичном отрезке? Приведите примеры.
6. Как определяется мера множества на прямой? Приведите примеры.
7. Что такое мера Лебега-Стилтьеса? Приведите примеры.
8. Как связаны понятия меры и заряда? Приведите примеры.
9. Что такое функция ограниченной вариации? Приведите примеры.
10. Что такое производящая функция? Приведите примеры.
11. Что такое плотность меры? Приведите примеры.
12. Что такое абсолютно непрерывная функция? Приведите примеры.
13. Что такое функция скачков? Приведите примеры.
14. Что такое сингулярная мера? Приведите примеры.
15. Как разлагается произвольная мера на отрезке? Приведите примеры.
16. Что такое топология? Приведите примеры. Какими свойствами обладают открытые множества в топологическом пространстве?
19. Что такое топологическое пространство? Приведите примеры.
20. Что такое борелевские множества? Приведите примеры.
21. Как определяется мера в измеримом пространстве? Какая мера называется положительной, конечной? Приведите примеры.
22. Какая мера называется сосредоточенной на множестве? Приведите примеры.
23. Что такое вероятностная мера, мера Дирака?
24. Что такое регулярная мера? Приведите примеры.
25. Как ставится задача Коши в банаховом пространстве?
26. При каких условиях множество вероятностных мер будет инвариантно относительно дифференциального преобразования?

27. Как записывается решение дифференциального уравнения со специальной правой частью в семействе положительных мер Радона?

28. Каково предельное поведение решения дифференциального уравнения со специальной правой частью в семействе положительных мер?

### Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов. Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач.
отлично	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме. Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.
очень хорошо	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами. Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.
хорошо	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами. Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами
удовлетворительно	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме. Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами.
неудовлетворительно	При решении стандартных задач не продemonстрированы основные умения и базовые навыки. Имели место грубые ошибки.
плохо	Отсутствие минимальных умений. Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие умений и навыков вследствие отказа обучающегося от ответа

### 5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции ПК-13:

1. Определение открытого и замкнутого множеств
2. Определение топологического пространства (в т.ч. хаусдорфова)

3. Определение динамической системы.
4. Определение нормированного пространства
5. Определение полного пространства
6. Определение банахового пространства
7. Функции вещественной переменной со значениями в банаховом пространстве (Абстрактные функции).
8. Определение меры
9. Определение вариации меры
10. Определение сужение меры
11. Понятие и определение множества меры нуль
12. Определение сходимости почти всюду последовательности функций
13. Определение интеграла Лебега.
14. Определение борелевской и лебеговской мер
15. Определение измеримых по Лебегу подмножеств
16. Определение абсолютно непрерывной меры, неатомические меры.
17. Динамические системы положительных мер
18. Уравнение с наследованием

#### **Критерии оценивания (оценочное средство - Собеседование)**

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки. Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач.
отлично	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.
очень хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок
хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок
удовлетворительно	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых

Оценка	Критерии оценивания
	ошибки.
неудовлетворительно	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.
плохо	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа

## 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельным и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков.	При решении стандартных задач не	Имеется минимальный набор	Продemonстрированы базовые	Продemonстрированы базовые	Продemonстрированы навыки	Продemonстрирован творческий



	Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	навыков для решения стандартных задач с некоторым и недочетами	навыки при решении стандартных задач с некоторым и недочетами	навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	подход к решению нестандартных задач
--	--	--	--	---	---	--	--------------------------------------

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

### 5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

#### 5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-13

1. Топологическое пространство. Открытые и замкнутые множества на прямой.
2. Структура открытых и замкнутых множеств на прямой.
3. Мера открытых и замкнутых множеств на прямой.
4. Внешняя и внутренняя мера множества на прямой.
5. Измеримые множества на прямой.
6. Измеримые функции. Определение и основные свойства.
7. Последовательности измеримых функций. Сходимость по мере и почти всюду.
8. Интеграл Лебега.

9. Функции ограниченной вариации. Абсолютно непрерывные функции.

10. Общее определение меры. Свойства меры.

11. Теоремы Радона-Никодима, Рисса, Сакса

12. Задача Коши в банаховом пространстве.

13. Решение дифференциального уравнения со специальной правой частью в семействе положительных мер Радона

### **Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)**

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», Даны ответы на все вопросы, возможно не в полном объеме или с недочетами.
не зачтено	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно». Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно». Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно» Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки. Даны ответы не на все вопросы или имели место грубые ошибки.

### **6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)**

Основная литература:

1. Кузенков Олег Анатольевич. Уравнения динамики меры : учеб. пособие для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки "Приклад. математика и информатика", "Информ. технологии" / ННГУ. - Н. Новгород : [б. и.], 2010 (Тип. ННГУ). - 100 с. - 80.00., 30 экз.
2. Кузенков Олег Анатольевич. Оптимизация динамики меры : учеб. пособие для студентов ННГУ / ННГУ. - Н. Новгород : Изд-во ННГУ, 2013. - 142 с. - ISBN 978-5-91326-185-4 : 39.06., 37 экз.
3. Натансон Исидор Павлович. Теория функций вещественной переменной : учебник для студентов вузов. - 3-е изд., испр. - СПб. : Лань, 1999. - 560 с. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - ISBN 5-8114-0136-1 : 63.00., 1 экз.

Дополнительная литература:

1. Кузенков Олег Анатольевич. Математические модели процессов отбора : учебно-методическое пособие / О. А. Кузенков, Е. А. Рябова, К. Р. Круподерова ; ННГУ им. Н. И. Лобачевского. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2012. - 133 с. - Текст : электронный., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=851324&idb=0>.
2. Кузенков Олег Анатольевич. Математические модели процессов отбора : учебно-методическое пособие / О. А. Кузенков, Е. А. Рябова, К. Р. Круподерова ; ННГУ им. Н. И. Лобачевского. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2012. - 133 с. - Текст : электронный., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=851324&idb=0>.
3. Макаров Иринарх Петрович. Дополнительные главы математического анализа : учеб. пособие

для физ.-мат. фак. пед. ин-тов. - М. : Просвещение, 1968. - 312 с. : с черт. - 0.67., 2 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

1. Кузенков О.А., Новоженин А.В. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА СЧЕТНОМЕРНОМ СИМПЛЕКСЕ// Вестник ННГУ. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2009. №3. С. 145-151. <http://www.vestnik.unn.ru/ru/nomera?anum=2483>
2. Кузенков О. А., Новоженин А. В. СИСТЕМЫ ОТБОРА НА СЧЁТНОМЕРНОМ СИМПЛЕКСЕ// Вестник ННГУ. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2011. №3. С. 92-98. <http://www.vestnik.unn.ru/ru/nomera?anum=4376>

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.02 - Прикладная математика и информатика.

Автор(ы): Кузенков Олег Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Калинин Алексей Вячеславович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 13.12.2023, протокол № 3.