

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол № 15 от 24.12.2025 г.

Рабочая программа дисциплины

Прикладной тензорный анализ

Уровень высшего образования
Бакалавриат

Направление подготовки / специальность
01.03.02 - Прикладная математика и информатика

Направленность образовательной программы
Математическое моделирование и вычислительная математика

Форма обучения
очная

г. Нижний Новгород

2026 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.ДВ.02.02 Прикладной тензорный анализ относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-4: Способен применять методы математического и компьютерного исследования при анализе задач на основе знаний фундаментальных математических и компьютерных наук	<p>ПК-4.1: Знает фундаментальные и теоретические основы, необходимые для исследования научных проблем</p> <p>ПК-4.2: Умеет самостоятельно применять полученные знания для анализа объекта исследования, определять цели и задачи исследования, а также выбирать корректный метод исследования научной проблемы</p> <p>ПК-4.3: Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности, а именно решения научных задач в соответствии с поставленной целью и выбранной методикой</p>	<p>ПК-4.1: Знать фундаментальные и теоретические основы, необходимые для исследования научных проблем</p> <p>ПК-4.2: Уметь самостоятельно применять полученные знания для анализа объекта исследования, определять цели и задачи исследования, а также выбирать корректный метод исследования научной проблемы</p> <p>ПК-4.3: Иметь практический опыт научно-исследовательской деятельности, а именно решения научных задач в соответствии с поставленной целью и выбранной методикой</p>	Контрольная работа Собеседование	Зачёт: Задания Контрольные вопросы

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	2
Часов по учебному плану	72
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	

- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	32
- КСР	1
самостоятельная работа	7
Промежуточная аттестация	0 Зачёт

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
Ф Ф Ф	Ф Ф Ф	Ф Ф Ф	Ф Ф Ф	Ф Ф Ф	
Введение	3	2		2	1
Тензорная алгебра	21	8	12	20	1
Дифференциальное исчисление	19	8	10	18	1
Интегральное исчисление	17	8	8	16	1
Приложения	5	2	2	4	1
Тензорные функции	3	2		2	1
Обзор курса	3	2		2	1
Аттестация	0				
КСР	1			1	
Итого	72	32	32	65	7

Содержание разделов и тем дисциплины

1. Введение. Математическое моделирование. Евклидово ориентированное пространство. Системы координат. Инвариантность. Физические величины и их тензорные свойства. Скаляры, векторы, тензоры. Краткие исторические сведения.
2. Тензорная алгебра. Тензоры нулевого ранга – скаляры. Тензоры 1-го ранга – векторы (определение, полярные и аксиальные, сложение, умножение вектора на скаляр, линейное /векторное/ пространство, линейная зависимость векторов, базис и размерность векторного пространства, системы координат, скалярное, векторное, смешанное умножение векторов, координаты вектора, некоторые формулы векторной алгебры). Появление тензоров 2-го ранга (математическое, механическое: тензор инерции, тензор напряжений). Тензоры 2-го ранга (определения, алгебраические операции: транспонирование, сложение, умножения, двойные умножения, свойства и характеристики: след, векторный инвариант, определитель, единичный, обратный, взаимный, симметричный, антисимметричный, шаровой, девиатор, ортогональный, положительно определённый, собственные числа и собственные векторы, спектральное

разложение, возведение в степень, теорема Гамильтона-Кэли, инварианты, тензорный базис, координаты тензора, преобразование координат, тензорный признак /теорема деления тензоров/, тензорная поверхность). Тензоры высших рангов (определения, тензор Леви-Чивиты, символы Леви-Чивиты, символы Риччи, изотропные, гиротропные).

3. Дифференциальное исчисление. Тензорное поле. Криволинейные системы координат. Радиус-вектор. Основной и взаимный базис. Набла-оператор Гамильтона. Градиент тензорного поля (скалярное, векторное, тензорное высшего ранга). Потенциальное поле. Линейный тензор деформации. Тензор спина. Вихрь векторного поля. Формула Гельмгольца. Вычисление градиента. Дивергенция тензорного поля. Соленоидальное поле. Вычисление дивергенции. Ротор (вихрь) векторного поля. Вычисление ротора. Двукратное дифференцирование. Оператор Лапласа. Тензор несовместимости.

Дифференцирование базисных векторов. Символы Кристоффеля.

4. Интегральное исчисление. Формулы Стокса. Формулы Остроградского-Гаусса. Формулы Грина. Формулы Гаусса.

5. Приложения. Уравнения движения абсолютно твёрдого тела. Моделирование поведения сплошной среды.

6. Тензорные функции тензорного аргумента. Аналитические функции тензора 2-го ранга. Изотропные функции. Дифференцирование по тензорному аргументу. Производные от инвариантов тензора 2-го ранга.

7. Обзор курса. Подготовка к промежуточной аттестации.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

В рамках дисциплины предусмотрены следующие виды самостоятельной работы (порядок их выполнения, форма контроля):

- повторение материала, пройденного на занятиях лекционного типа (в течение всего семестра, опрос на занятиях лекционного и семинарского типа),
- самостоятельное изучение отдельных вопросов программы (1 раз в семестр, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к занятиям семинарского типа, решение задач по списку, представленному преподавателем (в течение всего семестра, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к промежуточному контролю успеваемости (зачет).

Дополнительная литература:

1. Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве / П.А.Жилин. – СПб.: Нестор, 2001. – 276 с. (http://teormeh.spbstu.ru/Zhilin_New/Vec_Ten_Book.htm).
2. Пальмов В.А. Элементы тензорной алгебры и тензорного анализа / В.А.Пальмов. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. – 109 с. (http://www.fea.ru/spaw2/uploads/files/Palmov/p_109.pdf).

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ПК-4:

Вариант 1

Задание 1

Определение, свойства, физический смысл скалярного произведения векторов.

Задание 2

Преобразовать выражение $\text{tr}(\mathbf{a} \times \mathbf{P}^T \times \mathbf{b})$.

Задание 3

Решить уравнение $(\text{tr } \mathbf{A} \cdot \mathbf{X})\mathbf{B} + \alpha \mathbf{X} = \beta \mathbf{C}$.

Вариант 2

Задание 1

Определение, свойства, геометрический смысл векторного произведения векторов.

Задание 2

Преобразовать выражение $\text{tr}[(\mathbf{P}^T \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b}]$.

Задание 3

Решить уравнение $(\text{tr } \mathbf{A} \cdot \mathbf{X})\mathbf{B} + \alpha \mathbf{X}^T = \beta \mathbf{C}$.

Вариант 3

Задание 1

Определение, свойства, геометрический смысл смешанного произведения векторов.

Задание 2

Преобразовать выражение $\text{tr}[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{P}^T)]$.

Задание 3

Решить уравнение $(\text{tr } \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^T)\mathbf{B} + \alpha \mathbf{X} = \beta \mathbf{C}$.

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответ полный и правильный на основании изученной теории; теоретический материал и решение поставленных задач изложены в необходимой логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный. Могут быть допущены две-три незначительные ошибки, исправленные по требованию преподавателя.
не зачтено	Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя.

5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции ПК-4:

1. Физическое пространство.
2. Классификация физических величин.
3. Евклидово геометрическое пространство.
4. Векторное пространство.
5. Скалярное произведение векторов.
6. Векторное произведение векторов.
7. Смешанное произведение векторов.
8. Двойное векторное произведение векторов.
9. Линейная зависимость системы векторов.
10. Базис векторного пространства.
11. Тензор 2-го ранга.
12. Умножение тензорных величин.
13. Набла оператор Гамильтона.

14. Градиент.
15. Дивергенция.
16. Ротор.
17. Формула Гаусса-Остроградского.

Критерии оценивания (оценочное средство - Собеседование)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответ полный и правильный на основании изученной теории; теоретический материал и решение поставленных задач изложены в необходимой логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный. Могут быть допущены две-три несущественные ошибки, исправленные по требованию преподавателя.
не зачтено	Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя.

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными и несущественными	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов

			полном объеме	объеме, но некоторые с недочетами	с недочетами	недочетами, выполнены все задания в полном объеме	
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ПК-4

- Доказать $a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$. (ЗК14)
- Преобразовать $(a \times b) \times c$. (ЗК3)
- Преобразовать $(a \times b) \cdot (c \times d)$. (ЗК18)
- Преобразовать $(a \times b) \times (c \times d)$.
- Доказать $a \cdot (b \times c) d = (a \cdot d) b \times c + (b \cdot d) c \times a + (c \cdot d) a \times b$. (ЗК19)
- Доказать $a = n(a \cdot n) + n \times (a \times n)$, где n – единичный вектор.
- Дано: i, j, k – ортонормированный базис, правая тройка; $a = i + k$; $b = 2i - k$; $X = ii + ij + 4ki - 2kj$; $Y = ii + 2ki - kj$. Вычислить: а) $ab + X$; б) $(\text{tr} X)Y$; в) $a \cdot Xb$; г) $a \times X \cdot b$; д) $aX \times b$; е) $a \times (X \cdot Y) \cdot b$; ж) $a \cdot (X \times Y) \times b$.
- Доказать соотношения:
 $a \cdot Q = Q^T \cdot a$; $P \times a = -(a \times P^T)^T$; $(P \cdot Q)^T = Q^T \cdot P^T$; $\text{tr} Q = \text{tr} Q^T$; $\text{tr}(P \times a) = \text{tr}(a \times P)$;
 $\text{tr}(P \cdot Q) = \text{tr}(Q \cdot P) = \text{tr}(Q^T \cdot P^T) = \text{tr}(P^T \cdot Q^T)$
- Упростить (преобразовать) выражения (вычислить):
 $(P \times a)$; $(P^T \times a)$; $(a \times P)$; $(a \times P^T)$.
- Упростить (преобразовать) выражения (вычислить):
 $\text{tr}(a \times P \times b)$; $\text{tr}[(P \times a) \times b]$; $\text{tr}[a \times (b \times P)]$; $\text{tr}[(P \times a)^T \times b]$; $\text{tr}[a \times (b \times P)^T]$;
 $\text{tr}(a \times P^T \times b)$; $\text{tr}[(P^T \times a) \times b]$; $\text{tr}[a \times (b \times P^T)]$; $\text{tr}[(P^T \times a)^T \times b]$; $\text{tr}[a \times (b \times P^T)^T]$;
- Упростить (преобразовать) выражения (вычислить):
 $(a \times P \times b)$; $[(P \times a) \times b]$; $[a \times (b \times P)]$; $[(P \times a)^T \times b]$; $[a \times (b \times P)^T]$;
 $(a \times P^T \times b)$; $[(P^T \times a) \times b]$; $[a \times (b \times P^T)]$; $[(P^T \times a)^T \times b]$; $[a \times (b \times P^T)^T]$;
- Преобразовать
 $a \times (b \times Q)$; $(Q \times a) \times b$; $(a \times b) \times Q$; $Q \times (a \times b)$.

Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно»
не зачтено	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».

5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-4

- Полярные и аксиальные векторы.
- Линейная зависимость векторов.
- Базис и размерность векторного пространства. Координаты вектора в базисе.
- Скалярное, векторное, смешанное произведение векторов.
- Скалярное, векторное, тензорное произведение тензоров.
- Множественные произведения тензоров.
- Свойства и характеристики тензоров 2-го ранга.
- Тензорный базис. Координаты тензора в базисе.
- Градиент, дивергенция, ротор тензорного поля.
- Дифференцирование базисных векторов.

11. Интегральные формулы.

12. Аналитические функции тензора 2-го ранга.

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответ полный и правильный на основании изученной теории; теоретический материал и решение поставленных задач изложены в необходимой логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный. Могут быть допущены две-три не существенные ошибки, исправленные по требованию преподавателя.
не зачтено	допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Жидков А. В. Элементы тензорного исчисления в евклидовом пространстве: тензорная алгебра : электронное учебно-методическое пособие / Жидков А. В., Шабаров В. В. - Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2012. - 80 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ННГУ им. Н. И. Лобачевского - Математика., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=729856&idb=0>.
2. Лурье Анатолий Исакович. Нелинейная теория упругости. - М. : Наука, 1980. - 512 с. - 5.20., 2 экз.
3. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред / пер. с англ. Е. И. Свешниковой ; под ред. М. Э. Эглит. - М. : Мир, 1974. - 318 с. - 1.50., 12 экз.

Дополнительная литература:

1. Баландин Александр Владимирович. Тензорная алгебра : учебно-методическое пособие. Ч. 1 / А. В. Баландин, О. А. Муляр, А. Г. Разуваев ; ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Механико-математический факультет, Кафедра геометрии и высшей алгебры. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2004. - 16 с. - Текст : электронный., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=825089&idb=0>.
2. Максимова Галина Михайловна. Основы векторного и тензорного анализа для физиков : учебно-методическое пособие / Г. М. Максимова, А. И. Малышев, А. В. Тележников ; ННГУ им. Н. И. Лобачевского. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2017. - 110 с. - Текст : электронный., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=823608&idb=0>.
3. Максимова Г. М. Сборник контрольных заданий по курсу векторного и тензорного анализа : учеб. пособие / Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского. - Н. Новгород : ННГУ, 2002. - 33 с. : ил., табл. - 15.00., 100 экз.
4. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред / пер. с англ. Р. В. Гольдштейна, В. М. Ентова ; под ред. П. А. Жилина, А. И. Лурье. - М. : Мир, 1975. - 592 с. - 2.75.,

12 экз.

5. Димитриенко Юрий Иванович. Нелинейная механика сплошной среды : Учебное пособие. - Москва : Издательская фирма "Физико-математическая литература" (ФИЗМАТЛИТ), 2009. - 624 с. - ВО - Бакалавриат. - ISBN 978-5-9221-1110-2., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=617085&idb=0>.

6. Димитриенко Юрий Иванович. Тензорное исчисление : учеб. пособие для вузов. - М. : Высшая школа, 2001. - 575 с. : ил. - ISBN 5-06-004155-7 : 89.54., 1 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/difgeometry.htm>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами, специализированным оборудованием: проектор, экран

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.02 - Прикладная математика и информатика.

Автор(ы): Жидков Александр Васильевич, кандидат технических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Игумнов Леонид Александрович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 17.12.2025, протокол № протокол №6.