

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им.Н.И. Лобачевского»**

Дзержинский филиал ННГУ

УТВЕРЖДЕНО
решением ученого совета ННГУ
Протокол от «31» мая 2023 г. № 6

Рабочая программа дисциплины

Линейная алгебра

(наименование дисциплины)

Уровень высшего образования

Бакалавриат

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность

38.03.01 ЭКОНОМИКА

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы

ФИНАНСЫ И КРЕДИТ

(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Форма обучения

Очная, очно-заочная

(очная / очно-заочная / заочная)

Год набора: 2023

Дзержинск

2023 г.

1. Место и цели дисциплины (модуля) в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.12. «Линейная алгебра» относится к обязательной части образовательной программы направления подготовки 38.03.01 Экономика.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине	
УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.2. Грамотно, логично, аргументировано формирует собственные суждения и оценки.	Знать сущность основных теоретических методов исследования, таких как анализ и синтез Уметь осуществлять поиск и анализ информации в рамках поставленных задач Владеть основными понятиями и навыками необходимыми для применения системного подхода в решении практических задач, навыками грамотно, логично, аргументированно формулировать собственные суждения и оценки	Задачи, контрольные работы, Тест
ОПК-5. Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении профессиональных задач	ОПК 5.2. Использует современные информационные технологии и программные средства для решения профессиональных задач	Знать современные информационные технологии и программные средства Уметь применять современные технологии в решении профессиональных задач Владеть навыками обоснования организационно-управленческих решений в рамках профессиональной деятельности	Задачи, контрольные работы, Тест

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная форма обучения	очно-заочная форма обучения
Общая трудоемкость	4 ЗЕТ	4 ЗЕТ
Часов по учебному плану	144	144
в том числе		
аудиторные занятия (контактная работа):	48	24
– занятия лекционного типа	24	12
– занятия семинарского типа (практические занятия)	24	12
- КСРИФ	1	1
самостоятельная работа	95	119
Промежуточная аттестация – зачет		

3.2. Содержание дисциплины

Наименование	Всего	В том числе
--------------	-------	-------------

и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля), форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	(часы)			Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы									Самостоятельная работа обучающегося, часы					
				из них														
	Очная	Очно-заочная	Заочная	Занятия лекционного типа			Занятия семинарского типа			Занятия лабораторного типа			Всего					
Очная				Очно-заочная	Заочная	Очная	Очно-заочная	Заочная	Очная	Очно-заочная	Заочная	Очная	Очно-заочная	Заочная	Очная	Очно-заочная	Заочная	
Матрицы и определители	31	28		6	2		6	3					12	5		19	23	
Системы линейных уравнений. Балансовый анализ	31	30		6	3		6	3					12	6		19	24	
Векторная алгебра	31	28		6	2		6	2					12	4		19	24	
Линейные пространства и линейные операторы	27	28		4	2		4	2					8	4		19	24	
Элементы аналитической геометрии	23	29		2	3		2	2					4	5		19	24	
КСРИФ	1	1											1	1				
Промежуточная аттестация - зачет																		
Итого	144	144		24	12		24	12					49	25		95	119	

Содержание разделов дисциплины

Тема1. Матрицы и определители.

Понятие матрицы произвольного порядка. Действия над матрицами. Виды матриц. Определитель квадратной матрицы. Свойства определителя. Обратная матрица. Ранг матрицы. Ранг матрицы при элементарных преобразованиях матриц. Теоремы о связи ранга с числом линейно независимых строк, о представлении строки в виде линейной комбинации независимых строк.

Тема 2. Системы линейных уравнений. Балансовый анализ.

Виды СЛУ. Решения СЛУ. Система линейных уравнений в матричной форме. Метод решения линейных систем, у которых число уравнений равно числу переменных, переходом к обратной матрице. Правило Крамера решения систем линейных уравнений. Метод Гаусса. Теорема Кронекера-Капелли. Схема решения СЛУ. Однородные системы линейных алгебраических уравнений. Фундаментальные решения. Общее решение неоднородной СЛУ. Балансовые модели в экономике.

Тема 3. Векторная алгебра.

Геометрический вектор. Основные понятия. Линейные операции над векторами. Скалярное произведение векторов. Ось, числовая ось, проекция вектора на ось. Декартов базис в пространстве и на плоскости и декартова система координат. Координаты вектора. Модуль (длина) вектора в координатах. Линейные операции в координатах. Скалярное произведение в координатах.

Тема 4. Линейные пространства и линейные операторы.

Понятие линейного векторного пространства. Векторы в n -мерном евклидовом пространстве. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Размерность векторного пространства. Базис векторного пространства. Разложение вектора по базису. Переход к новому базису. Матрица перехода. Линейные операторы и их свойства. Матрица линейного оператора. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.

Тема 5. Элементы аналитической геометрии.

Уравнение прямой на плоскости и в пространстве. Полуплоскость. Уравнение плоскости. Полупространство. Кривые второго порядка и их канонические уравнения.

План семинарских занятий

Тема 1. Матрицы и определители

Семинар 1. Действия над матрицами. Ранг матрицы при элементарных преобразованиях. Вычисление определителей (решение задач).

Семинар 2. Методы нахождения обратной матрицы. Матричные уравнения (решение задач).

Тема 2. Системы линейных уравнений. Балансовый анализ.

Семинар 3. Решение определенных систем линейных уравнений методом Крамера и с помощью обратной матрицы.

Семинар 4. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса. Решение однородных систем линейных уравнений. Модель межотраслевого баланса Леонтьева (по результатам самостоятельного решения задач с применением ППП Excel).

Тема 3. Векторная алгебра

Семинар 5. Этапы решения задач векторным методом (разбор примеров).

Тема 4. Линейные пространства и линейные операторы

Семинар 6. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Базис векторного пространства. Матрица перехода к другому базису.

Семинар 7. Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного оператора.

Тема 5. Элементы аналитической геометрии

Семинар 8. Задачи на нахождение уравнений прямой, плоскости и кривых второго порядка.

Практические занятия организуются, в том числе в форме практической подготовки, которая предусматривает участие обучающихся в выполнении отдельных элементов работ, связанных с будущей профессиональной деятельностью.

Практическая подготовка предусматривает: решение прикладной задачи по профилю профессиональной деятельности и направленности образовательной программы.

На проведение практических занятий в форме практической подготовки отводится 2 часа.

Практическая подготовка направлена на формирование и развитие:

- компетенций - ОПК-5.

Текущий контроль успеваемости реализуется в рамках занятий семинарского типа.

Лекции и практические занятия в активной и интерактивной форме; самостоятельная работа обучающихся (в т.ч. в терминал-классе), письменные контрольные работы (содержащие в т.ч. результаты вычислительных (компьютерных) расчетов с использованием ППП Excel); опросы в устной и форме. В соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика» реализация компетентного подхода в образовательном процессе

предусматривает широкое использование в учебном процессе активных и интерактивных форм проведения занятий (в том числе с использованием компьютерных технологий) в сочетании с внеаудиторной работой с целью формирования и развития профессиональных навыков обучающихся. Для этого, в частности, используются следующие формы и технологии проведения занятий:

- моделирование различных аспектов профессиональной деятельности;
- работа в малых группах;

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Виды самостоятельной работы по дисциплине:

1. Подготовка к практическим занятиям, в частности выполнение заданий и решение задач, выдаваемых на самостоятельную подготовку;
2. Выполнение аудиторных и домашних контрольных работ;
3. Работа с литературой;
4. Самостоятельное изучение отдельных вопросов теории;
5. Подготовка к экспресс-контрольным по учебным темам дисциплины.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используется электронный курс Линейная алгебра-Э (<https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=4313>), созданный в системе электронного обучения ННГУ.

При подготовке к практическим занятиям студентам рекомендуется повторить материал предшествующих тем рабочего учебного плана, а также материал предшествующих учебных дисциплин, который служит базой изучаемого раздела данной дисциплины.

Задания для практических занятий подбираются из учебников списка основной литературы.

Методические указания по выполнению заданий для самостоятельной работы

Самостоятельная работа студентов – это планируемая работа, выполняемая по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. Она способствует углублению и расширению знаний, формированию интереса к познавательной деятельности, овладению приемами процесса познания, развитию познавательных способностей.

Для эффективного выполнения заданий самостоятельной работы студентам предлагается организовать свою работу в рамках когнитивных и метакогнитивных учебных стратегий. Когнитивные стратегии включают в себя учебные действия, направленные на обработку и усвоение учебной информации. К когнитивным учебным стратегиям относятся:

- Повторение (заучивание, переписывание, подчеркивание, выделение, обозначение и др.);
- Элаборация (конспектирование, подбор примеров, сравнение, установление межпредметных связей, использование дополнительной литературы, перефразирование, составление понятийного дерева и др.);
- Организация (группирование по темам, составление классификации, таблиц, схем, написание резюме и др.); планирование (составление плана, логика построения содержания, постановка цели, реализация цели и др.).

Метакогнитивные стратегии подразумевают организацию и управление учебной деятельностью. К метакогнитивным стратегиям относятся:

- Планирование (составление плана, логика построения содержания, постановка цели, реализация цели и др.);
- Наблюдение (оценка достигнутого, ответы на вопросы для самоконтроля, применение теории на практике, составление тезисов по теме, обращение к другим научным источникам и др.);
- Регуляция (самоконтроль, самооценка, использование дополнительных ресурсов, волевая регуляция, определенная последовательность выполнения задания и др.).

Задания первого и второго уровней самостоятельной работы – общеобразовательные и опираются на базовые учебные стратегии (повторения, элаборации), поэтому в одинаковой мере могут быть использованы для формирования всех профессиональных компетенций.

Первый уровень самостоятельных работ: письменные ответы на вопросы, определение понятий «своими словами».

Второй уровень самостоятельных работ: составление профессионального миниглоссария по теме исследования; домашние контрольные работы.

Третий уровень самостоятельных работ: конспектирование научной литературы заданной теме, аннотирование научной литературы по актуальным проблемам исследования.

Четвертый уровень самостоятельных работ: подготовка обзора по теме «Методы оптимизации в современных исследованиях в области экономико-математического моделирования», изучение научных журнальных работ отечественных и зарубежных исследователей по актуальным проблемам исследования с восстановлением промежуточных выкладок.

Пятый уровень самостоятельных работ: составление портфолио; выполнение учебно-исследовательской (проектной) работы.

Качество выполнения самостоятельных работ студентов осуществляется на основе нескольких видов контроля. *Корректирующий контроль* осуществляется преподавателем во время индивидуальных занятий в виде собеседования или тестовой проверки. *Констатирующий контроль* происходит по заранее составленным индивидуальным планам изучения дисциплины или выполнения определенного задания для оценки результатов завершённых этапов самостоятельной работы. *Самоконтроль* осуществляется самим студентом по мере изучения дисциплины по составленным программным вопросам. *Итоговый контроль* представляет собой аттестацию студентов по всем видам работы.

5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине

5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с не-	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Вы-	Продемонстрированы все основные умения, решены все основные задачи с от-	Продемонстрированы все основные умения, решены все основные

	отказа обучающегося от ответа	грубые ошибки.	ошибками. Выполнены все задания но не в полном объеме.	грубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	полнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	дельными несущественным недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне, выше предусмотренного программой
зачтено	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.2 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

5.2.1 Контрольные вопросы

Вопросы к зачету по дисциплине «Линейная алгебра»:

Вопрос	Код компетенции
1. Понятие матрицы. Виды матриц.	УК-1
2. Операции над матрицами и их свойства.	ОПК-5

3. Определители квадратных матриц.	УК-1
4. Свойства определителей.	ОПК-5
5. Обратная матрица. Способы её нахождения.	УК-1
6. Метод обратной матрицы для решения матричных уравнений.	ОПК-5
7. Линейная зависимость строк матрицы. Элементарные преобразования матриц. Приведение матрицы к ступенчатому виду. Ранг матрицы.	ОПК-5
8. Системы линейных уравнений и их виды. Теорема Кронекера-Капелли.	УК-1
9. Квадратные неоднородные системы линейных уравнений. Формулы Крамера.	ОПК-5
10. Нахождение решений произвольной системы линейных уравнений. Метод Гаусса.	ОПК-5
11. Собственные значения и собственные векторы квадратных матриц.	ОПК-5
12. Квадратичные формы. Матрица квадратичной формы. Эквивалентные квадратичные формы.	УК-1
13. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Положительно и отрицательно определённые квадратичные формы.	ОПК-5
14. Векторы. Нулевой вектор. Длина вектора. Классификация векторов на плоскости и в пространстве.	УК-1
15. Линейные операции над векторами: сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число.	ОПК-5
16. Прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве. Координаты вектора и точки. Координаты суммы векторов и произведения вектора на число. Условие коллинеарности двух векторов.	УК-1
17. Длина вектора. Расстояние между двумя точками. Скалярное произведение векторов. Основные свойства. Выражение скалярного произведения через прямоугольные координаты.	УК-1
18. Векторное и смешанное произведения векторов. Их свойства и выражения через прямоугольные координаты.	ОПК-5
19. Простейшие задачи, решаемые векторно-координатным методом.	ОПК-5
20. Понятие линии. Прямая. Различные виды уравнений прямой на плоскости.	УК-1
21. Нормальный вектор прямой. Расстояние от точки до прямой.	ОПК-5
22. Угол между двумя прямыми на плоскости. Условия параллельности, перпендикулярности и совпадения двух прямых на плоскости. Точка пересечения двух прямых.	ОПК-5
23. Линии второго порядка на плоскости: окружность, эллипс, гипербола, парабола. Эксцентриситет, директрисы и фокусы кривых второго порядка на плоскости.	УК-1
24. Плоскости в пространстве. Уравнения плоскости в пространстве. Нормальный вектор плоскости. Расстояние от точки до плоскости. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.	ОПК-5
25. Прямая в пространстве, виды ее уравнений, взаимное расположение прямых в пространстве.	ОПК-5
26. Угол между прямой и плоскостью в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве.	ОПК-5

5.2.2. Тестовые задания для оценки компетенции «УК-1»:

Комплект тестовых заданий

№1. Найдите матрицу X , если известно, что:

$$X * \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 34 \\ 33 & 77 \end{pmatrix}$$

Варианты ответов:

- 1) $X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$
- 2) $X = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$
- 3) $X = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$
- 4) $X = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

№2. Найдите матрицу X , если известно, что:

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 12 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 20 \end{pmatrix}$$

Варианты ответов:

- 1) $X = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$
- 2) $X = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$
- 3) $X = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$
- 4) $X = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

№3. Найдите транспонированную матрицу по отношению к матрице

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 6 \\ 8 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Варианты ответов:

- 1) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 8 & 6 & 5 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$
- 2) $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 6 \end{pmatrix}$
- 3) $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ -3 & 6 & 3 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix}$
- 4) $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

№4. Матрицу $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ возвели в степень n , и получилась матрица $\begin{pmatrix} 35 & 126 \\ 42 & 161 \end{pmatrix}$. Чему равно n ?

Варианты ответов:

- 1) 4
- 2) 2
- 3) 3
- 4) 5

№5. Сопоставьте матрицу и её вид:

1) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

А) Диагональная

Б) Единичная

В) Ступенчатая

Г) Треугольная

№6. Произведение матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ на транспонированную по отношению к ней матрицу равно:

Варианты ответов:

1) $\begin{pmatrix} 101 & 43 \\ 43 & 29 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 130 & 43 \\ 43 & 72 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 43 & 101 \\ 43 & 29 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 43 & 29 \\ 101 & 43 \end{pmatrix}$

№7. Найдите x , если известно, что определитель матрицы $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ x-3 & 2 & 4 \\ 7 & x-5 & 6 \end{pmatrix}$ равен 14.

Варианты ответов:

- 1) 3
- 2) 4
- 3) 7
- 4) 1

№8. Найдите x и y , если известно, что определитель матрицы $\begin{pmatrix} -1 & y+4 & 2 \\ 0 & x+1 & 5 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ равен 25, а

определитель матрицы $\begin{pmatrix} 0 & -2 & y+5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & x \end{pmatrix}$ равен -12.

Варианты ответов:

- 1) $x = 3, y = 3$
- 2) $x = 2, y = -1$
- 3) $x = -1, y = 3$
- 4) $x = 3, y = -1$

№9. Найдите решение системы линейных уравнений:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

Варианты ответов:

- 1) (3;1;2)
- 2) (-2;1;0)
- 3) (-3;-1;-2)
- 4) (2;-1;0)

№10. Решите систему линейных уравнений
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 9, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4. \end{cases}$$

Варианты ответов:

- 1) $(2 + c_1 + 2c_2, 1 - 2c_1 + c_2, c_1, -c_2)$
- 2) $(2 + c_1 - 2c_2, 1 - 2c_1 - c_2, c_1, c_2)$
- 3) $(c_1 - 2c_2, 1, c_1, c_2)$
- 4) $(2; -1; 0)$

№11. Найдите собственные значения матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Варианты ответов:

- 1) -1; -2
- 2) -1; 2
- 3) 1; 2
- 4) 1; -2

5.2.3. Типовые задания/задачи для оценки сформированности компетенции УК-1, ОПК-5

Примеры типовых задач для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации и по итогам освоения дисциплины:

1. Вычислить сумму и произведение двух матриц: $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Найти ранг матрицы: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Привести матрицу к ступенчатому виду: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

5. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$. б) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему уравнений, используя правило Крамера:
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -3 \\ -x - y + 2z = -6 \\ 2x + y + 2z = -1 \end{cases}$$

7. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы:
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -3 \\ -x - y + 2z = -6 \\ 2x + y + 2z = -1 \end{cases}$$

8. Решить систему уравнений методом Гаусса:
$$\begin{cases} 3x + 4y = -2 \\ 2x - y + 4z = -1 \\ -x - 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

9. Найти \bar{x} , если $\bar{x} = 3\bar{a}_1 - 2\bar{a}_2 + \bar{a}_3$ и $\bar{a}_1 = (1, 2, 1, 2)$, $\bar{a}_2 = (-1, -3, 4, 5)$, $\bar{a}_3 = (-5, 0, 2, 3)$.

10. Выясните, являются ли векторы линейно независимыми. Если векторы линейно зависимы, выразите один из векторов через остальные.

1) $\bar{a}_1 = (1, -1, 0)$, $\bar{a}_2 = (2, 0, -1)$;

2) $\bar{a}_1 = (1, -3, 2)$, $\bar{a}_2 = (-1, 3, -2)$;

3) $\bar{a}_1 = (0, 5, -7)$, $\bar{a}_2 = (0, 0, 0)$, $\bar{a}_3 = (1, 0, -2)$;

4) $\bar{a}_1 = (1, -2, 5)$, $\bar{a}_2 = (1, 0, 0)$, $\bar{a}_3 = (0, 1, 0)$, $\bar{a}_4 = (0, 0, 1)$;

11. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы линейного оператора:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Записать уравнения прямой, проходящей через точку $M(8; 9; 10)$ параллельно оси OZ .

13. Составить уравнение прямой, проходящей через две данные точки: $A(-3; 1)$ и $B(1; 2)$.

14. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3; 4)$ параллельно прямой:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3}.$$

15. Составить уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат, большая ось равна 16, а расстояние между директрисами 32.

16. Определить фокус и директрису параболы $y^2 = 12x$.

Контрольная работа 1.

Вариант 1

1. Вычислите определитель с использованием правила Лапласа:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Найдите обратную матрицу для следующих матриц. Проверьте результат.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вариант 2

1. Вычислите определитель с использованием правила Лапласа:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Найдите обратную матрицу для следующих матриц. Проверьте результат.

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & -3 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Контрольная работа 2.

Вариант 1

1. Решите систему уравнений двумя способами: методом обратной матрицы и методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

2. Решите систему уравнений методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 10, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 11x_1 + 11x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 8. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Решите систему уравнений двумя способами: методом обратной матрицы и методом Крамера:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

2. Решите систему уравнений методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 7x_1 + 5x_2 - 7x_3 - x_4 = 8, \\ x_1 + 8x_2 - 18x_3 - 5x_4 = -6. \end{cases}$$

Контрольная работа 3.

Вариант 1

1. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Найдите линейное преобразование неизвестных, приводящее квадратичную форму, заданную своей матрицей, к каноническому виду. Выясните, является ли квадратичная форма знакоопределённой.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 2

1. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Найдите линейное преобразование неизвестных, приводящее квадратичную форму, заданную своей матрицей, к каноническому виду. Выясните, является ли квадратичная форма знакоопределённой.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Контрольная работа 4.

Вариант 1

1. Докажите тождество $(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$.
2. Вектор \vec{c} перпендикулярен векторам \vec{a} и \vec{b} , а угол между \vec{a} и \vec{b} равен 30° . Зная, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = |\vec{c}| = 3$, вычислите $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.
3. Найдите объем треугольной пирамиды с вершинами $A(0;0;1)$, $B(2;3;5)$, $C(6;2;3)$ и $D(3;7;2)$.

Вариант 2

1. Докажите, что $(\vec{a} \times \vec{b})^2 \leq \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$. В каком случае будет иметь знак равенства?
2. Векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , образующие правую тройку, взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$, вычислите $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.
3. Постройте пирамиду с вершинами $O(0;0;0)$, $A(5;2;0)$, $B(2;5;0)$, $C(1;2;4)$ и вычислите её объем, площадь грани ABC и высоту пирамиды, опущенную на эту грань.

Контрольная работа 5.

Вариант 1

1. Треугольник ABC задан своими вершинами $A(3;4)$, $B(2;-1)$, $C(1;-7)$. Составьте уравнения:

- а) трёх его сторон,
 - б) трёх его медиан,
 - в) прямых, проходящих через вершины треугольника параллельно противоположным сторонам,
 - г) серединного перпендикуляра к стороне AB ,
 - д) трёх его высот.
2. Постройте кривые второго порядка и отметьте их элементы:
- а. $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 13 = 0$;
 - б. $y^2 - 8y = 4x$;
 - с. $16x^2 - 9y^2 - 64x + 54y - 161 = 0$;
 - д. $x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 2 = 0$.

Вариант 2

1. Треугольник ABC задан своими вершинами $A(-4; -5)$, $B(3; 3)$, $C(5; -2)$. Составьте уравнения:
- а) трёх его сторон,
 - б) трёх его медиан,
 - в) прямых, проходящих через вершины треугольника параллельно противоположным сторонам,
 - г) серединного перпендикуляра к стороне AB ,
 - д) трёх его высот.
2. Постройте кривые второго порядка и отметьте их элементы:
- а. $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y = 3$;
 - б. $x^2 + 4x + 2y + 4 = 0$;
 - с. $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$;
 - д. $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$.

Контрольная работа 6.

Вариант 1

1. Найдите расстояние от точки $M(2; -1; 3)$ до прямой $l: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{5}$.
2. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1; 3; 5)$ и прямую $l: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$.
3. Постройте плоскость $\pi: x + y - z = 0$ и прямую, проходящую через точки $M_1(0; 0; 4)$ и $M_2(2; 2; 0)$. Найдите точку пересечения прямой с плоскостью и угол между ними.

Вариант 2

1. Вычислите угол между прямой $l: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{0}$ и прямой, проходящей через начало координат и точку $M(1; 1; -1)$.
2. Докажите перпендикулярность прямых $l_1: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$ и $l_2: \begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0, \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0. \end{cases}$
3. Напишите уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Борताковский А. С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Практикум : учебное пособие / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. — 2-е изд., стер. — Москва : ИНФРА-М, 2019. — 352 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-010206-1. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1014764>
2. Красс М.С. Математика для экономического бакалавриата : учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. — Москва : ИНФРА-М, 2020. — 472 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-004467-5. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1072296>
3. Шершнев В.Г Основы линейной алгебры и аналитической геометрии: Учебное пособие. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2017. - 168 с. (доступно в ЭБС «Знаниум», режим доступа: <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=558491>).

б) дополнительная литература:

1. Бортаковский А.С. Линейная алгебра в примерах и задачах: Учебное пособие / А.С. Бор-таковский, А.В. Пантелеев. - 3-е изд., стер. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 592 с. (доступно в ЭБС «Знаниум», режим доступа: <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=494895>).
2. Журбенко Л. Н. Математика в примерах и задачах: Учебное пособие / Журбенко Л.Н.,
3. Никонова Г.А., Никонова Н.В., Дегтярева О.М. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 372 с. (доступно в ЭБС «Знаниум», режим доступа: <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=484735>).
4. Ивлева А.М. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия / Ивлева А.М., Прилуцкая П.И., Черных И.Д. - Новосиб.: НГТУ, 2014. - 180 с. (доступно в ЭБС «Знаниум», режим доступа: <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=548302>).
5. Рудык Б.М. Линейная алгебра: Учебное пособие - М.: НИЦ Инфра-М, 2014. - 318 с.(доступно в ЭБС «Знаниум», режим доступа: <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=460611>).
6. Шевцов Г.С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты: Учебное пособие. - 3-е изд., испр. и доп. - М.: Магистр: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 544 с. (доступно в ЭБС «Знаниум», режим доступа: <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=438021>).

в) интернет-ресурсы:

1. Фонд образовательных электронных ресурсов ННГУ [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://www.unn.ru/books/resources> — Загл. с экрана. [Дата обращения: 26.03.2020]
2. Электронная библиотека учебников[Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://studentam.net>— Загл. с экрана.[Дата обращения: 26.03.2020]
3. Российская государственная библиотека [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://www.rsl.ru>— Загл. с экрана.[Дата обращения: 26.03.2020]
4. Научная электронная библиотека[Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://elibrary.ru/>— Загл. с экрана.[Дата обращения: 26.03.2020]

в) Интернет-ресурсы

1. <http://elibrary.ru/>
2. <http://e.lanbook.com/>
3. <http://www.znanium.com/>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой, оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения: (ноутбук, проектор, экран).

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети Интернет и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду ННГУ.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика», профиль «Финансы и кредит».

Автор(ы):

к.физ-мат.н., доцент

Алексеев А.А.

Программа одобрена Методической комиссией Дзержинского филиала ННГУ,
от 31.05.2023 года, протокол № 13