

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Физический факультет

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол № 6 от 31.05.2023 г.

Рабочая программа дисциплины

Дифференциальные уравнения

Уровень высшего образования
бакалавриат

Направление подготовки / специальность
03.03.02 - Физика

Направленность образовательной программы
профиль «Физика конденсированного состояния»

Форма обучения
очная

г. Нижний Новгород

2023 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина «Дифференциальные уравнения» относится к базовой части Б1.Б блока Б1 «Дисциплины (модули)», является обязательной для освоения, преподается на втором году обучения, в третьем семестре. Освоению дисциплины предшествует освоение дисциплины (модуля) «Математический анализ» в первом и втором семестрах.

Целями освоения дисциплины «Дифференциальные уравнения» являются:

1. знакомство студентов с теорией дифференциальных уравнений, являющейся основой всех базовых курсов теоретической физики;
2. обучение студентов основным типовым методам и приемам, необходимым при решении различных видов дифференциальных уравнений.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ОПК-1: Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности	<i>Демонстрация способности применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности</i>	(ОПК-1) Уметь решать в рамках профессиональной деятельности задачи, требующие знания основных методов теории дифференциальных уравнений; (ОПК-1) Знать математический аппарат дифференциальных уравнений, границы применимости и возможности его использования; (ОПК-1) Владеть навыками решения обыкновенных дифференциальных уравнений.	Индивидуальные собеседования	Вопросы к экзамену

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	4
Часов по учебному плану	144

в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	67
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	32
- КСР	3
самостоятельная работа	77
Промежуточная аттестация	36 экзамен

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе				Самостоятельная работа в течение семестра, часы
		контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем) в течение семестра, часы, из них				
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего	
1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Теорема существования и единственности решения. Частное решение. Общее решение. Общий интеграл. Поле направлений, изоклины. Типы дифференциальных уравнений первого порядка и методы их решения: уравнения с разделенными и разделяющимися переменными; однородные уравнения и сводящиеся к однородным; линейные уравнения; уравнение Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах. Признак полного дифференциала. Интегрирующий множитель. Особые точки и особые линии. Типы особых точек. Особые решения. Огибающая однопараметрического семейства плоских кривых. Уравнение огибающей. Огибающая семейства интегральных кривых – особое решение уравнения. Изогональные и ортогональные траектории. Метод введения параметра для уравнений, разрешенных относительно неизвестной функции и разрешенных относительно аргумента. Уравнения Лагранжа и Клеро.	11	3	3	–	6	5
2. Дифференциальные уравнения высших порядков. Дифференциальное уравнение семейства кривых. Уравнения, допускающие понижение порядка.	11	3	3	–	6	5
3. Линейные дифференциальные уравнения. Однородные и неоднородные уравнения.	11	3	3	–	6	5

Линейный оператор $L(y)$ и его свойства. Линейные однородные уравнения: теоремы о сумме решений и о комплексных решениях. Линейно-зависимые и линейно-независимые функции. Определитель Вронского и его свойства. Теорема об общем решении уравнения порядка n . Фундаментальная система решений.						
4. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение и характеристический многочлен. Решение уравнения в случае действительных и комплексных корней. Решение уравнения в случае кратных корней.	12	3	3	—	6	6
5. Линейные неоднородные уравнения. Теорема об общем решении линейного неоднородного уравнения. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных. Уравнения с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью. Типы решений. Теорема о форме частного решения, в случае, когда правая часть является суммой слагаемых, каждое из которых имеет специальный вид.	12	4	4	—	8	4
6. Уравнения Эйлера. Однородные уравнения Эйлера, характеристическое уравнение и общее решение. Форма решений в случае комплексных корней и в случае кратных корней. Неоднородные уравнения Эйлера со специальной правой частью. Типы решений.	12	4	4	—	8	4
7. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Теорема существования и единственности решения. Поведение фазовых траекторий в случае автономных и неавтономных систем. Метод сведения системы n уравнений первого порядка к одному уравнению порядка n . Системы линейных дифференциальных уравнений – основные теоремы. Структура общего решения. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами. Первые интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений.	12	4	4	—	8	4
8. Теория устойчивости. Определение устойчивости решения дифференциального уравнения по линейному приближению. Теорема Ляпунова. Теорема Четаева. Определение устойчивости решений с помощью матрицы Гурвица.	12	4	4	—	8	4
9. Квазилинейные дифференциальные уравнения в частных производных. Решение линейного однородного уравнения. Уравнения характеристик. Квазилинейные неоднородные уравнения. Неоднородные уравнения с двумя независимыми переменными.	12	4	4		8	4
В т.ч. текущий контроль	2	2				—
Промежуточная аттестация – зачет и экзамен						

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа студента – неотъемлемая часть подготовки высококвалифицированного специалиста в соответствующей области. Ее цель – формирование у студентов способностей и навыков к непрерывному самообразованию и профессиональному совершенствованию.

Самостоятельная работа студентов подразумевает проработку лекционного и дополнительного материала, решение домашних контрольных работ с последующей проверкой навыков решения задач.

Проработка лекционного материала осуществляется еженедельно после проведения аудиторных занятий в рамках часов, отведенных студентам на самостоятельную работу. Кроме того, работа с лекционным и дополнительным материалом (рекомендованной литературой, приведенной в конце данной программы) проводится в период сессии при подготовке к экзамену по дисциплине.

Выполнение домашних работ осуществляется еженедельно или раз в две недели в соответствии с графиком изучения соответствующего лекционного материала и проведения практических занятий по соответствующей тематике.

Задачи для выполнения самостоятельных контрольных работ по каждому разделу дисциплины составляются преподавателем самостоятельно при ежегодном обновлении банка тестовых заданий. Количество вариантов зависит от числа обучающихся.

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Экзамен	
Превосходно	Превосходная подготовка с очень незначительными погрешностями. Исчерпывающее и логически строгое изложение всех разделов дисциплины. Владение материалом позволяет быстро справиться с видоизмененным заданием. Успешное решение любых типов практических заданий.
Отлично	Подготовка, уровень которой существенно выше среднего с некоторыми ошибками. Твердое знание всех разделов дисциплины. Допускаются неточности, нарушения в последовательности изложения материала. Владение необходимыми приемами и способами решения практических заданий.
Очень хорошо	Хорошая подготовка с рядом заметных недочетов. Твердое знание основных разделов дисциплины. Владение необходимыми приемами и способами решения основных типов практических заданий.
Хорошо	В целом, хорошая подготовка, но со значительными ошибками. Твердое знание основных разделов дисциплины. Владение необходимыми приемами и способами решения практических заданий.
Удовлетворительно	Подготовка, удовлетворяющая минимальным требованиям. Знания основного содержания разделов дисциплины, допускаются грубые неточности, неправильные формулировки, нарушения в последовательности изложения материала. Имеющихся знаний достаточно для освоения дисциплин последующих курсов. Допускаются значительные ошибки при выполнении практических заданий.

Неудовлетворительно	Необходима дополнительная подготовка для успешного прохождения испытания. Незнание значительной части основного содержания разделов дисциплины. Имеющихся знаний недостаточно для освоения дисциплин последующих курсов.
Плохо	Подготовка совершенно недостаточная. Отсутствуют знания большей части основного содержания разделов дисциплины. Имеющихся знаний совершенно недостаточно для освоения дисциплин последующих курсов.

6.2. Процедуры и критерии оценивания результатов обучения по дисциплине

Для оценивания результатов обучения в виде знаний используются следующие процедуры и технологии:

– индивидуальное собеседование (промежуточная аттестация).

Для оценивания результатов обучения в виде умений и владений используются следующие процедуры и технологии: практические контрольные задания. Типы практических контрольных заданий:

– выполнение практических заданий (текущий контроль, промежуточная аттестация).

Критерии ответа студента на экзамене

Оценка «отлично» – Ответ полный и правильный, на основании изученной теории; материал изложен в определенной логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный и полностью выполнены индивидуальные практические задания.

Оценка «хорошо» – Ответ полный и правильный, на основании изученной теории; материал изложен в определенной логической последовательности при этом допущены две–три несущественные ошибки, исправленные по требованию преподавателя и правильно; полностью выполнены индивидуальные практические задания.

Оценка «удовлетворительно» – Ответ полный, но при этом допущена существенная ошибка или неполный, несвязный ответ и выполнены индивидуальные практические задания.

Оценка «неудовлетворительно» – Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя, не выполнены индивидуальные практические задания

6.3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

6.3.1 Примеры практических заданий для практических занятий, самостоятельной работы обучающихся, проведения текущего контроля и промежуточной аттестации:

Задача 1.

Поведение математического маятника с трением описывается уравнением $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0$, где $\gamma > 0$. Его положение равновесия $x = \pi$

- всегда устойчиво
- всегда неустойчиво
- устойчиво при $\gamma > \omega_0$

Задача 2.

Частное решение дифференциального уравнения $y'' + y = \sin x$ имеет вид

- a) $C_1 \sin x + C_2 \cos x$
- b) $2 \sin x$
- c) $-\frac{x}{2} \cos x$

Задача 3.

Порядок дифференциального уравнения $(y'')^2 + y' = xy''$ может быть понижен с помощью замены

- a) $y' = z(y)$
- b) $y' = z(x)$
- c) $y' = y \cdot z(x)$

Задача 4.

Дифференциальное уравнение $y^2 = (xy - x^2)y'$ можно свести к уравнению с разделяющимися переменными путем замены

- a) $z(x) = \frac{y}{x}$
- b) $z(x) = x^2 + y^2$
- c) $z(x) = x - y$

Задача 5.

Дифференциальное уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ является уравнением полного дифференциала при условии, что

- a) функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны и дифференцируемы в некоторой области плоскости xOy
- b) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$
- c) $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$

Правильные ответы:

Задача 1. b)

Задача 2. c)

Задача 3. b)

Задача 4. a)

Задача 5. b)

1. Дифференциальные уравнения первого порядка:

1.1. $(4y^2 + x^2)y' = xy$

1.2. $xy' + y = y^2 \ln x$

1.3. $x(y'^2 - 1) = 2y'$

1.4. $(xy' - y) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x$

1.5. $xy^2 y' = x^2 + y^3$

$$1.6. x - y' \sqrt{1 + y'^2} = 0$$

$$1.7. xy' = y + x \left(1 + e^{\frac{y}{x}} \right)$$

$$1.8. y' \cdot (x - \ln y') = 1$$

$$1.9. \frac{y}{x} dx + (y^3 + \ln x) dy = 0$$

$$1.10. (y^2 - 3x^2) dy + 2xy dx = 0$$

$$1.11. y'^2 - xy' - y = 0$$

$$1.12. \frac{3x^2 + y^2}{y^2} dx - \frac{2x^3 + 5y}{y^3} dy = 0$$

2. Дифференциальное уравнение семейства кривых, огибающая семейства кривых, ортогональные и изогональные траектории:

2.1. Найти дифференциальное уравнение семейства и уравнение ортогональных траекторий: $y = (x + C)^2$

2.2. Найти дифференциальное уравнение семейства и уравнение ортогональных траекторий: $y^2 = 2px$

2.3. Найти дифференциальное уравнение семейства и уравнение огибающей: $y = \operatorname{tg}^2(x + C)$

2.4. Найти дифференциальное уравнение семейства и уравнение огибающей: $y = e^{-(x+C)^2}$

2.5. Найти дифференциальное уравнение семейства и уравнение огибающей: $(x - C^2)^2 + y^2 = C^2$

2.6. Найти дифференциальное уравнение семейства и уравнение огибающей: $y = (x + C)^2 e^{-x^2}$

2.7. Найти дифференциальное уравнение семейства и уравнение ортогональных траекторий: $x^2 + C = 2Cy$

2.8. Найти дифференциальное уравнение семейства и уравнение огибающей: $y = C^2 x^2 + C$

2.9. Найти дифференциальное уравнение семейства и уравнение огибающей: $y = x \sin(Cx)$

2.10. Найти дифференциальное уравнение семейства и уравнение огибающей: $y = Cx^2 + C^2 + C$

3. Дифференциальные уравнения высших порядков:

$$3.1. x^3(y'' - y) = x^2 - 2$$

$$3.2. x^4((y')^2 - 2yy'') = 4x^3yy' + 1$$

$$3.3. (1 - x^2)y'' + xy' = 2$$

$$3.4. y^4 - y^3y'' = 1$$

$$3.5. y'' - 2y' + y = xe^x(\sin ix)^2$$

$$3.6. \quad x^2 y'' - xy' + y = \frac{x}{\ln x} + \frac{\ln x}{x}$$

$$3.7. \quad \text{Написать вид общего решения ЛНДУ с постоянными коэффициентами:} \\ y'' - 6y' + 13y = 3xe^x \sin 2x + e^3(x^4 - 8)$$

$$3.8. \quad \frac{y^2}{x^2} + (y')^2 = 3xy'' + \frac{2yy'}{x}$$

$$3.9. \quad xy'' = y' + x(y'^2 + x^2)$$

$$3.10. \quad y'''(y')^2 = (y'')^3$$

$$3.11. \quad y'' + 2y' + y = \cos ix$$

$$3.12. \quad x^2 y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$$

4. Теория устойчивости:

$$4.1. \text{проверить на устойчивость положение равновесия (1, 2) системы: } \begin{cases} \dot{x} = y - x^2 - x \\ \dot{y} = 3x - x^2 - y \end{cases}$$

$$4.2. \text{проверить на устойчивость нулевое решение системы: } \begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(y - x) \\ \dot{y} = 2e^y - 2\cos(\pi/3 - x) \end{cases}$$

$$4.3. \text{проверить на устойчивость нулевое решение уравнения: } y^{IV} + 2y''' + 6y'' + 5y' + 6y = 0$$

5. Системы дифференциальных уравнений и уравнения в частных производных:

$$5.1. \quad \begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y \\ \dot{y} = -x + y \end{cases}$$

$$5.2. \quad \begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = -x + y \end{cases}$$

$$5.3. \quad xy \frac{\partial z}{\partial x} + (x - 2z) \frac{\partial z}{\partial y} = yz$$

$$5.4. \quad y \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x}$$

$$5.5. \quad yz \frac{\partial z}{\partial x} - xz \frac{\partial z}{\partial y} = e^z$$

$$5.6. \text{Решить уравнение } (1+x) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \ln y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \text{ при условии, что } z = y \text{ при}$$

$$x = 0$$

$$5.7. \quad (1+x^2) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \ln y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z + 1$$

$$5.8. \quad y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = (z+1)^2 y$$

$$5.9. \quad \frac{\partial z}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{x+1}$$

5.10. Решить уравнение $(1+x) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y(\ln y + 1) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ при условии, что $z = \ln y$ при $x = \ln y - 1$.

6.3.2. Вопросы для итогового контроля сформированности компетенции:

1. Теорема существования и единственности решения.
2. Поле направлений, изоклины.
3. Уравнения с разделенными и разделяющимися переменными.
4. Однородные уравнения.
5. Уравнения, сводящиеся к однородным.
6. Линейные уравнения.
7. Уравнение Бернулли.
8. Признак полного дифференциала.
9. Интегрирующий множитель.
10. Особые точки и особые линии. Типы особых точек. Особые решения.
11. Уравнение огибающей.
12. Огибающая семейства интегральных кривых – особое решение уравнения.
13. Изогональные и ортогональные траектории.
14. Метод введения параметра для уравнений, разрешенных относительно неизвестной функции y .
15. Метод введения параметра для уравнений, разрешенных относительно x .
16. Уравнения Лагранжа и Клеро.
17. Дифференциальное уравнение семейства кривых.
18. Уравнения, допускающие понижение порядка.
19. Линейный дифференциальный оператор $L(y)$ и его свойства.
20. Линейные однородные уравнения: теорема о сумме решений.
21. Линейные однородные уравнения: теорема о комплексных решениях.
22. Определитель Вронского и его свойства.
23. Теорема об общем решении уравнения порядка n .
24. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод решения.
25. Характеристическое уравнение и характеристический многочлен.
26. Решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней.
27. Решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами в случае кратных корней.
28. Теорема об общем решении линейного неоднородного уравнения.
29. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных.
30. Уравнения с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью. Типы решений.
31. Теорема о форме частного решения, в случае, когда правая часть является суммой слагаемых, каждое из которых имеет специальный вид.
32. Однородные уравнения Эйлера, характеристическое уравнение и общее решение.
33. Форма решений уравнения Эйлера в случае комплексных корней и в случае кратных корней.
34. Неоднородные уравнения Эйлера со специальной правой частью. Типы решений.
35. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Поведение фазовых траекторий в случае автономных и неавтономных систем.
36. Метод сведения системы n уравнений первого порядка к одному уравнению порядка n .
37. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами.
38. Первые интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

39. Сведение задачи об устойчивости произвольного решения системы уравнений к задаче об устойчивости нулевого решения. Исследование на устойчивость по линейному приближению.
40. Определение устойчивости решений ЛОДУ с постоянными коэффициентами с помощью матрицы Гурвица.
41. Теорема Ляпунова. Теорема Четаева.
42. Решение линейного однородного уравнения в частных производных. Уравнения характеристик.
43. Линейные неоднородные уравнения в частных производных.

6.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания

Положение «О проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в ННГУ», утвержденное приказом ректора ННГУ от 13.02.2014 №55-ОД.

Положение о фонде оценочных средств, утвержденное приказом ректора ННГУ от 10.06.2015 №247-ОД.

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Материально-техническое обеспечение дисциплины обусловлено наличием учебных аудиторий для проведения занятий, оборудованных специализированной мебелью, меловыми или магнитно-маркерными досками для представления учебной информации большой аудитории. Ресурс мела и маркеров для доски в учебных аудиториях регулярно возобновляется.

Учебные аудитории могут быть при необходимости оснащены демонстрационным оборудованием для сопровождения учебных занятий презентациями.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся (на базе Фундаментальной библиотеки ННГУ) оснащены компьютерной техникой с подключением к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ННГУ.

Программа составлена в соответствии с требованиями федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 03.04.02 Физика.

Автор(ы):

декан Физического факультета, к. ф.-м. н. А.И. Малышев.

Рецензенты(ы):

зав. кафедрой теоретической физики физического факультета, д. ф.-м. н., доцент В.А. Бурдов.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 20.05.2023, протокол № 6/н.