

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Физический факультет

---

УТВЕРЖДЕНО

решением Ученого совета ННГУ

протокол № 13 от 30.11.2022 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Теория групп и ее приложения

---

Уровень высшего образования

Магистратура

---

Направление подготовки / специальность

03.04.02 - Физика

---

Направленность образовательной программы

магистерская программа «Физика конденсированного состояния»

---

Форма обучения

очная

---

г. Нижний Новгород

2023 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина «Теория групп и ее приложения» относится к блоку ФТД «Факультативы», является факультативной дисциплиной, преподается в первом семестре первого года обучения в магистратуре.

Целями освоения дисциплины являются:

1. освоение студентами основ теории представлений и её применений, знакомство с современной теорией представлений групп, овладение основными понятиями и методами работы теории представлений конечных групп;
2. формирование у студентов общепрофессиональных и профессиональных компетенций в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 03.04.02 «Физика».

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-3.  Способен свободно владеть разделами физики, необходимыми для решения научно-инновационных задач, и применять результаты научных исследований в инновационной и проектной деятельности	<i>ПК-3.1. Знание основных законов физики</i> <i>ПК-3.2. Умение решать научно-инновационные задачи в своей инновационной и проектной деятельности</i> <i>ПК-3.3. Навыки применения результатов научных исследований в инновационной и проектной деятельности и зарубежного опыта</i>	(ПК-3) Знать новые методы и методические подходы в научно-инновационных исследованиях и инженерно-технологической деятельности;  (ПК-3) Уметь применять новые методы и методические подходы в научно-инновационных исследованиях и инженерно-технологической деятельности в области теории групп;  (ПК-3) Владеть навыками решения задач, основываясь на полученных в ходе освоения теории групп знаниях и умениях.	Индивидуальные собеседования, тест	Контрольные вопросы

## 3. Структура и содержание дисциплины

### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	<b>очная</b>
<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>2</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>72</b>

в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	<b>33</b>
- занятия лекционного типа	<b>16</b>
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	<b>16</b>
- КСР	<b>1</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>39</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>зачет</b>

### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины,  форма промежуточной аттестации по дисциплине	Всего (часы)	В том числе				
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них				Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего	
Введение. Группа, подгруппа, смежные классы	4	1	1		2	2
Классы сопряженных элементов	4	1	1		2	2
Изоморфизм и гомоморфизм групп; представления групп	5	1	1		2	3
Применение представлений в задачах квантовой механики	5	1	1		2	3
Приводимые и неприводимые представления	4	1	1		2	2
Леммы Шура и соотношения ортогональности	5	1	1		2	3
Теория характеров. Теоремы Бернсайда	4	1	1		2	2
Канонические базисы неприводимых представлений и разложение приводимого представления на неприводимые	4	1	1		2	2
Тензорное произведение матриц и представлений. Прямое произведение групп и его представления	5	1	1		2	3
Разрешенные и запрещенные переходы: правила отбора	4	1	1		2	2

Точечные группы	4	1	1		2	2
Бесконечный кристалл; решетка Браве	4	1	1		2	2
Трансляционная и точечная симметрия бесконечного кристалла	4	1	1		2	2
Симметрия конечного кристалла	5	1	1		2	3
Пространственная группа симметрии для кристалла без заполнения	5	1	1		2	3
Волновой вектор и его звезда. Малые представления и их свойства	5	1	1		2	3
в т.ч. текущий контроль			4			
Промежуточная аттестация- <b>Зачет</b>					1	

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа студента – неотъемлемая часть подготовки высококвалифицированного специалиста в соответствующей области. Ее цель – формирование у студентов способностей и навыков к непрерывному самообразованию и профессиональному совершенствованию.

Самостоятельная работа студентов подразумевает проработку лекционного и дополнительного материала, решение домашних контрольных работ с последующей проверкой навыков решения задач.

Проработка лекционного материала осуществляется еженедельно после проведения аудиторных занятий в рамках часов, отведенных студентам на самостоятельную работу. Кроме того, работа с лекционным и дополнительным материалом (рекомендованной литературой, приведенной в конце данной программы) проводится в период сессии при подготовке к экзамену по дисциплине.

Выполнение домашних работ осуществляется еженедельно или раз в две недели в соответствии с графиком изучения соответствующего лекционного материала и проведения практических занятий по соответствующей тематике.

Задачи для выполнения самостоятельных контрольных работ по каждому разделу дисциплины составляются преподавателем самостоятельно при ежегодном обновлении банка тестовых заданий. Количество вариантов зависит от числа обучающихся.

#### 5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

##### 5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

<b>Зачет</b>	
Зачтено	Обучающийся не продемонстрировал представления об основных теоретических разделах курса, не показал минимально допустимый уровень умений и навыков выполнения практических заданий.
Не зачтено	Обучающийся продемонстрировал изложение формулировок основных теоретических положений курса и успешно показал умения и навыки выполнения практических заданий базового уровня сложности.

## 6.2. Процедуры и критерии оценивания результатов обучения по дисциплине

**Для оценивания результатов обучения в виде знаний используются следующие процедуры и технологии:**

– индивидуальное собеседование (промежуточная аттестация).

**Для оценивания результатов обучения в виде умений и владений используются следующие процедуры и технологии:** практические контрольные задания. Типы практических контрольных заданий:

– выполнение практических заданий (текущий контроль, промежуточная аттестация).

## 6.3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

6.3.1 Примеры практических заданий для практических занятий, самостоятельной работы обучающихся, проведения текущего контроля и промежуточной аттестации:

### Задача 1.

Выяснить, будет ли группой множество чисел  $a+bD$ , где  $a$  и  $b$  любые рациональные числа, не равные нулю одновременно, а  $D$  -кубичный корень из трех?

### Задача 2.

Пусть порядок группы  $G$  равен 53. Доказать, что множество степеней любого элемента группы (кроме единичного) совпадает с  $G$

### Задача 3.

Доказать, что для любого неприводимого представления конечной группы  $G$  сумма матриц, отвечающих любому классу  $C$  сопряженных элементов  $G$ , есть  $aE$ , где  $a$ -константа, зависящая от  $C$ , а  $E$ -единичная матрица

### Задача 4.

Разложить на неприводимые представления группы  $D_3$  представление группы чистых вращений веса 2, рассматриваемое только для элементов из  $D_3$

Для оценки сформированности компетенции ПК-3: способность принимать участие в разработке новых методов и методических подходов в научно-инновационных исследованиях и инженерно-технологической деятельности

### Задача 5.

Найти разрешенные и запрещённые переходы для группы  $C_{3v}$  возмущающий оператор  $\Gamma=(x,y,z)$

### Задача 6.

Пусть матрицы  $D_g$  образуют двумерное представление группы  $C_{3v}$ . Разложить на неприводимые тензорное произведение этого представления самого на себя;

### Задача 7.

Найти разрешенные и запрещенные переходы в случае симметрии группы  $D_2$ , если возмущающий оператор есть  $\Gamma=(x,y,z)$ ;

### Задача 8.

Разложить функции  $x, y, z$ , по компонентам, принадлежащим неприводимым представлениям группы  $SD_{2d}$ .

Задания теста:

### **Задача 1.**

Определить, является ли группой (по сложению и умножению) множество комплексных чисел по модулю единица.

**Ответ а):** Да, по сложению

**Ответ б):** Да, по умножению

**Ответ в):** Нет, ни по сложению, ни по умножению

### **Задача 2.**

Определить, является ли группой (по сложению и умножению) множество комплексных чисел  $1, e^{i2\pi/3}, e^{i4\pi/3}$ .

**Ответ а):** Да, по сложению

**Ответ б):** Да, по умножению

**Ответ в):** Нет, ни по сложению, ни по умножению

### **Задача 3.**

Какие из перечисленных множеств являются подгруппами циклической группы 6-го порядка, образованной по элементу  $a$  ( $a^6=1$ )?

**Ответ а):**  $a, a^2, a^3$ .

**Ответ б):**  $a^2, a^4, a^6$ .

**Ответ в):**  $a^3, a^6$ .

### **Задача 4.**

Какие из множеств матриц могут осуществлять представление какой-либо группы?

**Ответ а):**  $\sigma_0, \sigma_y$ .

**Ответ б):**  $\sigma_x, \sigma_y$ .

**Ответ в):**  $\sigma_0, \beta$ ,

где  $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

### **Задача 5.**

Определить, какие из точечных групп являются абелевыми

**Ответ а):**  $C_4$ .

**Ответ б):**  $C_{3v}$ .

Ответ в):  $O_h$  .

**Правильные ответы к вопросам:**

Задача 1: б

Задача 2: б

Задача 3: б,в

Задача 4: а

Задача 5: а

**Задачи для оценки сформированности компетенции ПК-3  
(приведены ответы к задачам в тестовой форме)**

**Задача 1.**

Число неприводимых представлений абелевой группы 6-го порядка равно

Ответ а): двум;

Ответ б): шести;

Ответ в): трём.

**Задача 2.**

Найти характеры элементов группы инверсии  $(E, I)$  в представлении

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ а):  $\chi(E) = 2, \chi(I) = 0$ .

Ответ б):  $\chi(E) = 0, \chi(I) = 1$ .

Ответ в):  $\chi(E) = 0, \chi(I) = 2$ .

**Задача 3.**

Гамильтониан  $\hat{H} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{U_0}{x^2 + 2y^2 + 3z^2}$  инвариантен относительно преобразований, индуцированных группой

Ответ а):  $C_3$  .

Ответ б):  $C_{2h}$  .

Ответ в):  $C_4$  . (Ось поворота совпадает с осью z)

#### Задача 4.

Частица движется в поле, инвариантном относительно преобразований группы  $D_3$  (см. Таблицу характеров). Дискретные уровни энергии такой частицы вырождены с кратностью  $s$ , где

Ответ а):  $s=1,2,3$ .

Ответ б):  $s=1,2$ .

Ответ в):  $s=1,6$ .

#### Задача 5.

Дискретные уровни энергии частицы вырождены, если её гамильтониан инвариантен относительно преобразований группы

Ответ а): инверсии  $C_I$ .

Ответ б):  $C_{2h}$ .

Ответ в):  $C_{3v}$ .

#### Правильные ответы к задачам

(приведены ответы к задачам в тестовой форме)

Задача 1: б

Задача 2: а

Задача 3: б

Задача 4: б

Задача 5: в

#### 6.3.2. Вопросы для итогового контроля сформированности компетенции:

1. Определение и примеры групп и подгрупп.
2. Лемма о сдвиге, смежные классы.
3. Сопряженные элементы группы: в общем случае и в случае группы  $O^+(3)$ .
4. Изоморфизм и гомоморфизм групп.
5. Представления групп матрицами и операторами.
6. Эквивалентные представления; существование для каждого представления унитарно-эквивалентного.
7. Возникновение представлений в задачах квантовой механики.
8. Приводимость и неприводимость представлений; доказательство возможности разложения приводимого представления на неприводимые.
9. Доказательство первой и второй лемм Шура.
10. Вывод соотношений ортогональности.
11. Характеристики представлений и их свойства.
12. Разложение представления на неприводимые с помощью характеров.
13. Теорема Бернсайда о размерностях неприводимых представлений.
14. Теорема Бернсайда о числе не эквивалентных неприводимых представлений.



15. Определение функций-партнеров, их построение и свойства.
16. Разложение пространства приводимого представления на подпространства, где представление неприводимо.
17. Определение и свойства тензорных произведений пространств, операторов, матриц и представлений.
18. Прямое произведение произвольных групп, построение его неприводимых представлений с помощью неприводимых представлений групп — сомножителей.
19. Правила отбора (общая теория).
20. Правила отбора в случае группы  $D_3$  и электрического дипольного момента.
21. Определение и представления точечных групп  $C_n$ ,  $C_{nh}$ ,  $C_{nv}$ ,  $D_n$ ,  $D_{nh}$ ,  $D_{nd}$ ,  $T$ ,  $T_d$ ; правила отбора.
22. Определение бесконечного кристалла. Основные вектора. Решетка Браве.
23. Разрешенные типы точечной симметрии для бесконечного кристалла.
24. Условие Борна – фон Кармана для конечного кристалла и представления группы его трансляционной симметрии.
25. Обратная решетка, волновые вектора, зона Бриллюэна.
26. Теорема Блоха и трансляционные правила отбора.
27. Структура пространственной группы симметрии кристалла без заполнения.
28. Звезда и группа волнового вектора для кристалла с заполнением.
29. Малые представления и описание с их помощью всех неприводимых представлений группы пространственной симметрии кристалла с заполнением.

#### 6.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания

Положение «О проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в ННГУ», утвержденное приказом ректора ННГУ от 13.02.2014 №55-ОД.

Положение о фонде оценочных средств, утвержденное приказом ректора ННГУ от 10.06.2015 №247-ОД.

#### 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Материально-техническое обеспечение дисциплины обусловлено наличием необходимого количества учебников и учебных пособий в библиотеке, некоторые из которых представлены на сайте физического факультета ННГУ, электронной библиотеке кафедры ИТФИ в электронном виде.

Лекционный класс снабжен компьютером с проектором, что позволяет не только демонстрировать слайды, но и ряд вычислений проводить прямо в процессе чтения лекции

Программа составлена в соответствии с требованиями федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 03.04.02 Физика.

Автор(ы):

профессор высшей школы общей и прикладной физики, д. ф.-м. н. Г.М. Жислин.

Зав. каф. "Физика наноструктур и наноэлектроника" \_\_\_\_\_

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 17.11.2022, протокол № б/н.