

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования_
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО

решением Ученого совета ННГУ

протокол № 10 от 02.12.2024 г.

Рабочая программа дисциплины

Олимпиадная математика

Уровень высшего образования

Специалитет

Направление подготовки / специальность

01.05.01 - Фундаментальные математика и механика

Направленность образовательной программы

Фундаментальная механика и приложения

Форма обучения

очная

г. Нижний Новгород

2025 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина ФТД.04 Олимпиадная математика является факультативом в образовательной программе.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
УК-1: Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1: Знать методы критического анализа проблемных ситуаций УК-1.2: Уметь вырабатывать стратегию действий при возникновении критических ситуаций УК-1.3: Владеть основами системного подхода к анализу проблемных ситуаций	УК-1.1: Знают методы критического анализа проблемных ситуаций. УК-1.2: Умеют вырабатывать стратегию действий при возникновении критических ситуаций УК-1.3: Владеют основами системного подхода к анализу проблемных ситуаций	Задачи Собеседование	Зачёт: Задания

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	1
Часов по учебному плану	36
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	0
- КСР	1
самостоятельная работа	3
Промежуточная аттестация	0 Зачёт

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0
Комбинаторика: рекуррентные соотношения, перечисление графов, производящие функции, диаграммы Юнга, числа Каталана.	2	2		2	
Теория чисел: теоремы Ферма и Эйлера, алгебраические уравнения над кольцами вычетов, квадратичные вычеты, теорема Вильсона и критерий Эйлера, суммы двух квадратов, арифметические функции и целые точки.	2	2		2	
Теория многочленов: неприводимые многочлены: неприводимость по модулю, признаки Эйзенштейна и Дюма, симметрические многочлены, многочлены Чебышева, многочлены Бернулли.	2	2		2	
Неравенства: неравенство Коши –Буняковского, неравенство о средних, Йенсена, транс-неравенство, геометрические неравенства, интегральные варианты классических неравенств, задачи на наибольшие и наименьшие значения.	2	2		2	
Решение задач предыдущих студенческих олимпиад	27	24		24	3
Аттестация	0				
КСР	1			1	
Итого	36	32	0	33	3

Содержание разделов и тем дисциплины

1. Комбинаторика: рекуррентные соотношения, перечисление графов, производящие функции, диаграммы Юнга, числа Каталана.
2. Теория чисел: теоремы Ферма и Эйлера, алгебраические уравнения над кольцами вычетов, квадратичные вычеты, теорема Вильсона и критерий Эйлера, суммы двух квадратов, арифметические функции и целые точки.
3. Теория многочленов: неприводимые многочлены: неприводимость по модулю, признаки Эйзенштейна и Дюма, симметрические многочлены, многочлены Чебышева, многочлены Бернулли.
4. Неравенства: неравенство Коши –Буняковского, неравенство о средних, Йенсена, транс-неравенство, геометрические неравенства, интегральные варианты классических неравенств, задачи на наибольшие и наименьшие значения.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:
Электронные курсы, созданные в системе электронного обучения ННГУ:

Олимпиадная математика, .

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции УК-1:

1. → Пусть $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$ и $f(f(x)) = x$. Доказать, что существует точка x_0 , в которой $f(x_0) = x_0$. (5 баллов) ¶
2. → Доказать неравенство: $x^2 \geq (1+x) \cdot \ln^2(1+x)$, $x > -1$, $x \neq 0$. ¶
3. → Известно, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$. ¶
4. → Пусть $x_1 = 2$, $x_2 = 2 + 1/2$, $x_3 = 2 + 1/(2 + 1/2)$, \dots и т.д. Доказать, что последовательность x_n сходится и найти её предел. ¶
5. → Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема и ограничена на всей оси. Доказать, что существует точка x_0 , в которой $f''(x_0) = 0$. ¶
6. → Пусть A и B – произвольные квадратные матрицы. Доказать, что собственные значения матриц AB и BA совпадают. ¶
7. → Существует ли непрерывная, неотрицательная и неограниченная на интервале $[0, +\infty)$ функция $f(x)$ такая, что существует интеграл $\int_0^{+\infty} f(x) dx$. ¶
8. → Пусть $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$. Докажите, что ¶
9. → $\sqrt[n]{(a_1 + b_1) \cdot \dots \cdot (a_n + b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} + \sqrt[n]{b_1 \cdot \dots \cdot b_n}$. ¶
10. → Пусть $p \geq 1$ и $f(x) \geq 0$, причём функция $f^p(x)$ интегрируема (может быть в несобственном смысле) на любом конечном интервале $[0, A]$. Доказать, что $F^p(x) = o(x^{p-1})$ при $x \rightarrow 0$, где $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. ¶

Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Выполнены все или большая часть этапов решения задачи или задача решена с незначительными недочетами. Результаты работы представлены преподавателю в срок.

Оценка	Критерии оценивания
не зачтено	Выполнены не все практические задания или выполнены не в полном объеме (представлено не полное описание этапов выполнения заданий, получен неверный ответ, результаты работы не представлены преподавателю).

5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции УК-1:

1. Комбинаторика: рекуррентные соотношения, перечисление графов, производящие функции, диаграммы Юнга, числа Каталана.
2. Теория чисел: теоремы Ферма и Эйлера, алгебраические уравнения над кольцами вычетов, квадратичные вычеты, теорема Вильсона и критерий Эйлера, суммы двух квадратов, арифметические функции и целые точки.
3. Теория многочленов: неприводимые многочлены: неприводимость по модулю, признаки Эйзенштейна и Дюма, симметрические многочлены, многочлены Чебышева, многочлены Бернулли.
4. Неравенства: неравенство Коши –Буняковского, неравенство о средних, Йенсена, транс-неравенство, геометрические неравенства, интегральные варианты классических неравенств, задачи на наибольшие и наименьшие значения.

Критерии оценивания (оценочное средство - Собеседование)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Студент дал развернутый ответ на все вопросы без существенных ошибок.
не зачтено	При ответе студент допускает грубые ошибки в основном материале.

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компет	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно

енций (индик атора достиж ения компет енций)	не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельным и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».

	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции УК-1

1.→ Рассматривается множество окружностей, вписанных в данный полукруг. а) Какую линию представляет собой множество центров вписанных окружностей? б) Какая из двух частей, на которые эта линия делит полукруг, имеет большую площадь?¶

2.→ Вычислите определённый интеграл $\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1} dx$ ¶

3.→ Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2}$ сходится и найдите его сумму. ¶

4.→ Даны квадратные матрицы A и B одного порядка с действительными элементами, удовлетворяющие при некотором натуральном n соотношению $(A+B)^n = O$ (нулевая матрица). Известно, что матрица B невырожденная. а) Докажите, что если A и B коммутируют, то матрица A тоже невырожденная; б) справедливо ли утверждение п. а) без условия коммутирования?¶

5.→ Докажите, что при любом натуральном $n > 1$ два числа $(n-2)!$ и $\operatorname{НОД}(n, (n-2)!)$ сравнимы по модулю n . ¶

6.→ Представьте 30 в виде суммы нескольких положительных чисел так, чтобы произведение этих чисел было наибольшим. ¶

7.→ Рассматривается множество кубов в R^3 , у которых все вершины имеют целочисленные координаты и ни одно ребро не параллельно координатным осям. а) Докажите, что это множество непусто. б) Докажите, что длина ребра любого куба из этого множества — целое число. в) Обобщите утверждение п. б) для пространства R^{2n+1} . ¶

8.→ Рассматривается множество окружностей, вписанных в данный полукруг. а) Какую линию представляет собой множество центров вписанных окружностей? б) Какая из двух частей, на которые эта линия делит полукруг, имеет большую площадь?¶

9. Вычислите определённый интеграл ¶

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1} dx$$

10.→ Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2}$ сходится и найдите его сумму. ¶

11.→ Даны квадратные матрицы A и B одного порядка с действительными элементами, удовлетворяющие при некотором натуральном n соотношению $(A+B)^n = O$ (нулевая матрица). Известно, что матрица B невырожденная. а) Докажите, что если A и B коммутируют, то матрица A тоже невырожденная; б) справедливо ли утверждение п. а) без условия коммутирования?¶

12.→ Докажите, что при любом натуральном $n > 1$ два числа $(n-2)!$ и $\operatorname{НОД}(n, (n-2)!)$ сравнимы по модулю n . ¶

13.→ Представьте 30 в виде суммы нескольких положительных чисел так, чтобы произведение этих чисел было наибольшим. ¶

14.→ Рассматривается множество кубов в R^3 , у которых все вершины имеют целочисленные координаты и ни одно ребро не параллельно координатным осям. а) Докажите, что это множество непусто. б) Докажите, что длина ребра любого куба из этого множества — целое число. в) Обобщите утверждение п. б) для пространства R^{2n+1} . ¶

Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Выполнена основная часть задания, возможно с незначительными недочетами
не зачтено	Выполнено менее половины задания, есть существенные недочеты

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Студенческие олимпиады по математике УГТУ-УПИ / Веретенников Б. М., Мохрачева Л. П., Соболев А. Б., Ходак Г. Л. - 2-е изд. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 256 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ФИЗМАТЛИТ - Математика. - ISBN 978-5-9221-1078-5., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=695939&idb=0>.
2. Иванов О. А. Элементарная математика для школьников, студентов и преподавателей / Иванов О. А. - Москва : МЦНМО, 2009. - 384 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции МЦНМО - Математика. - ISBN 978-5-94057-505-4., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=711630&idb=0>.
3. Прасолов В. В. Многочлены / Прасолов В. В. - Москва : МЦНМО, 2017. - 335 с. - Книга из коллекции МЦНМО - Математика. - ISBN 978-5-4439-2638-4., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=828687&idb=0>.

Дополнительная литература:

1. Деркач Михаил Иванович. Математические олимпиады студентов технических вузов : Учебное пособие / Севастопольский государственный университет. - Москва : Вузовский учебник, 2020. - 112 с. - ВО - Бакалавриат. - ISBN 978-5-9558-0521-4. - ISBN 978-5-16-105059-0. - ISBN 978-5-16-012204-5., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=631953&idb=0>.
2. Студенческие математические олимпиады. Часть 1 : Учебное пособие. Ч. 1. Студенческие математические олимпиады. Часть 1 / Амбарцумян В. А., Андрющенко Е. А., Бухенский К. В., Дворецкова Е. А., Дюбуа А. Б., Зилотова М. А., Машнина С. Н., Сафошкин А. С. - Рязань : РГРТУ, 2014. - 128 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции РГРТУ - Математика., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=752777&idb=0>.
3. Студенческие математические олимпиады. Часть 2 : Учебное пособие. Ч. 2. Студенческие математические олимпиады. Часть 2 / Амбарцумян В. А., Андрющенко Е. А., Бухенский К. В., Дворецкова Е. А., Дюбуа А. Б., Машнина С. Н., Сафошкин А. С. - Рязань : РГРТУ, 2015. - 96 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции РГРТУ - Математика., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=752778&idb=0>.
4. Студенческие математические олимпиады. Часть 3 : Учебное пособие. Ч. 3. Студенческие математические олимпиады. Часть 3 / Бухенский К. В., Дюбуа А. Б., Конюхов А. Н., Кучерявый С. И., Машнина С. Н., Оленикова Ю. К., Ройтенберг В. Ш., Сафошкин А. С. - Рязань : РГРТУ, 2017. - 84 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции РГРТУ - Математика., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=752797&idb=0>.
5. Эвнин А. Ю. Математические олимпиады в ЮУрГУ 2010-2015 гг.: сборник задач / Эвнин А. Ю.

- Челябинск : ЮУрГУ, 2016. - 63 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ЮУрГУ - Математика., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=749382&idb=0>.

6. Андреева А. Н. Саратовские математические олимпиады. 1950/51–1994/95 / Андреева А. Н., Барабанов А. И., Чернявский И. Я. - Москва : МЦНМО, 2015. - 511 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции МЦНМО - Математика. - ISBN 978-5-4439-2301-7., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=716686&idb=0>.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

Не требуется

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.05.01 - Фундаментальные математика и механика.

Автор(ы): Малкин Михаил Иосифович, кандидат физико-математических наук, доцент.

Рецензент(ы): Чекмарев Дмитрий Тимофеевич, доктор физико-математических наук.

Заведующий кафедрой: Калинин Алексей Вячеславович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 02.12.2024, протокол № 5.