

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО

решением Ученого совета ННГУ

протокол № 10 от 02.12.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Качественная теория двумерных динамических систем

---

Уровень высшего образования

Специалитет

---

Направление подготовки / специальность

01.05.01 - Фундаментальные математика и механика

---

Направленность образовательной программы

Фундаментальная механика и приложения

---

Форма обучения

очная

---

г. Нижний Новгород

2025 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.ДВ.04.02 Качественная теория двумерных динамических систем относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

| Формируемые компетенции<br>(код, содержание компетенции)   | Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции  |   | Наименование оценочного средства   |                                 |
|--|--|---|------------------------------------|---------------------------------|
|  | Индикатор достижения компетенции<br>(код, содержание индикатора)   | Результаты обучения по дисциплине   | Для текущего контроля успеваемости | Для промежуточной аттестации    |
| ПК-12: Владение навыками применения математически сложных алгоритмов в современных специализированных программных комплексах, реализации в них собственных методов, моделей и алгоритмов | ПК-12.1: Знает теоретические основы фундаментальных компьютерных наук<br>ПК-12.2: Умеет ориентироваться в современных алгоритмах компьютерной математики<br>ПК-12.3: Имеет практический опыт использования математически сложных алгоритмов в современных программных комплексах, включая реализацию в них собственных методов и моделей | ПК-12.1:<br>Знать: теоретические основы фундаментальных компьютерных наук<br><br>ПК-12.2:<br>Уметь: проводить полное качественное исследование двумерных динамических систем, сочетая аналитические методы с численными результатами, полученными на компьютере<br><br>ПК-12.3:<br>Владеть практическим опытом использования математически сложных алгоритмов в современных программных комплексах, включая реализацию в них собственных методов и моделей. Владеет математическим аппаратом качественной теории и теории бифуркаций двумерных динамических систем, методами и приемами качественного исследования, доказательствами утверждений в этой области | Контрольная работа<br>Задачи       | Экзамен:<br>Контрольные вопросы |
| ПК-6: Владение навыками  | ПК-6.1: Умеет самостоятельно   | ПК-6.1:<br>Уметь проводить полное   | Контрольная работа                 | Экзамен:                        |

|   |   |   |        |                     |
|---|---|---|--------|---------------------|
| самостоятельного анализа поставленной задачи, выбора корректного метода ее решения, построения алгоритма и его реализации | анализировать задачу, выбирать методы решения, создавать алгоритм решения и реализовывать его<br>ПК-6.2: Владеет навыками решения практических задач, анализа результатов решения | качественное исследование двумерных динамических систем, сочетая аналитические методы с численными результатами, полученными на компьютере<br><br>ПК-6.2:<br>Владеть: математическим аппаратом качественной теории и теории бифуркаций двумерных динамических систем, методами и приемами качественного исследования, доказательствами утверждений в этой области | Задачи | Контрольные вопросы |
|---|---|---|--------|---------------------|

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

|  |                             |
|--|-----------------------------|
|  | <b>очная</b>                |
| <b>Общая трудоемкость, з.е.</b>  | <b>4</b>                    |
| <b>Часов по учебному плану</b>   | <b>144</b>                  |
| в том числе  |                             |
| <b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>                           |                             |
| - занятия лекционного типа   | <b>16</b>                   |
| - занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы) | <b>32</b>                   |
| - КСР  | <b>2</b>                    |
| <b>самостоятельная работа</b>  | <b>58</b>                   |
| <b>Промежуточная аттестация</b>  | <b>36</b><br><b>Экзамен</b> |

#### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

| Наименование разделов и тем дисциплины | Всего<br>(часы) | в том числе   |  |             |   |
|--|-----------------|---|--|-------------|---|
|  |                 | Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем),<br>часы из них |  |             | Самостоятельная<br>работа обучающегося,<br>часы |
|  |                 | Занятия<br>лекционного<br>типа  | Занятия<br>семинарского<br>типа<br>(практические<br>занятия/ лабора<br>торные<br>работы), часы | Всего       |   |
|  |                 | о<br>ф<br>о   | о<br>ф<br>о  | о<br>ф<br>о | о<br>ф<br>о                                     |

|   |     |    |    |    |    |
|---|-----|----|----|----|----|
| Тема 1: Тема 1. Основные понятия качественной теории автономных динамических систем на плоскости.       | 36  | 5  | 11 | 16 | 20 |
| Тема 2. Качественная структура окрестностей простых и сложных состояний равновесия и предельных циклов. | 36  | 5  | 11 | 16 | 20 |
| Тема 3. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости.   | 34  | 6  | 10 | 16 | 18 |
| Аттестация  | 36  |    |    |    |    |
| КСР   | 2   |    |    | 2  |    |
| Итого   | 144 | 16 | 32 | 50 | 58 |

### Содержание разделов и тем дисциплины

Тема 1. Основные понятия качественной теории автономных динамических систем.

Аксиоматическое определение динамической системы. Потоки и каскады. Одномерные динамические системы с дискретным временем. Диаграмма Кёнигса-Ламерея. Неподвижные и периодические точки. Источники и стоки, устойчивость и неустойчивость. Признак устойчивости-неустойчивости неподвижной точки; периодической точки. Предельные множества одномерных дискретных систем. Автономная динамическая система с непрерывным временем на плоскости. Дуга и цикл без контакта. Понятие о количественном и качественном исследовании динамических систем. Качественная структура динамической системы. Основная задача качественной теории динамических систем. Особые и неособые полутраектории и траектории. Ячейки динамической системы.

Тема 2. Качественная структура окрестностей простых и сложных состояний равновесия и предельных циклов.

Простые и сложные состояния равновесия автономных динамических систем на плоскости. Приведение динамической системы к каноническому виду.

Простые состояния равновесия с отличными от нуля действительными частями корней характеристического уравнения. Направления, в которых траектории стремятся к простым состояниям равновесия. Топологическая (качественная) структура окрестностей простых состояний равновесия. Состояния равновесия с чисто мнимыми корнями характеристического уравнения. Проблема различения центра и фокуса. Ляпуновские величины.

Теорема Ляпунова о необходимом и достаточном условии наличия центра.

Направления, в которых траектории стремятся к сложным изолированным состояниям равновесия.

Топологическая структура некоторых сложных состояний равновесия.

Замкнутые фазовые траектории. Предельные циклы. Орбитальная устойчивость.

Поведение траекторий ДС в бесконечно удаленной части плоскости. Преобразование Бендиксона.

Преобразования Пуанкаре.

Теория индексов Пуанкаре.

Метод точечных преобразований. Неподвижные точки. Устойчивость неподвижной точки и ее связь с устойчивостью предельного цикла. Диаграмма Ламерея. Теорема Кёнигса об устойчивости неподвижной точки точечного преобразования отрезка без контакта в себя.

Построение функции последования в окрестности замкнутой траектории. Характеристический показатель предельного цикла.

Критерии отсутствия замкнутых фазовых траекторий (Дюлака для односвязной области, Бендиксона, Дюлака для кольцеобразной области).

Топологическая система кривых Пуанкаре.

Тема 3. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости.

Определение грубой динамической системы. Необходимые и достаточные условия грубости системы.

Негрубые динамической системы. Системы первой степени негрубости. Необходимые и достаточные условия первой степени негрубости.

Консервативные системы на плоскости и их свойства.

Бифуркации динамических систем. Определение бифуркации. Простейшие бифуркации. Зависимость динамической системы от параметров. Определение бифуркационного значения параметра. Некоторые примеры смены качественных структур при изменении параметра. Зависимость динамической системы от двух и более параметров. Определение бифуркационной кривой.

Седло-узловая бифуркация. Бифуркация Андронова–Хопфа, понятия «безопасной» и «опасной» области устойчивости состояния равновесия («мягкое» и «жесткое» возбуждения периодических колебаний).

Бифуркация двукратного предельного цикла. Бифуркация петли сепаратрис седла.

Особенности качественной структуры и бифуркаций динамических систем с цилиндрической фазовой поверхностью. Цилиндрическая фазовая поверхность и возможные виды траекторий. Замкнутые траектории, охватывающие цилиндр. Особенности бифуркаций на цилиндре.

Примеры полного качественного исследования динамических систем.

#### **4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Самостоятельная работа обучающихся:

Выполнение заданий и решение задач на самостоятельную подготовку.

Подготовка к контрольной работе.

Образовательный материал для самостоятельной работы студента:

1.Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний (2-е изд.) М.: Физматгиз, 1959

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/physics/wave.htm>

2.Бутенин Н.В. Введение в аналитическую механику. М.: Наука, 1971

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mechanics/theoretical.htm>

3. Андронов А.А., Леонтович Е.В., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>

4. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.-Л.: ОГИЗ, 1947

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>

6. Морозов А.Д. Введение в математические методы нелинейной динамики. Электронное учебно-методическое пособие.-Н.Новгород:Нижегородский госуниверситет, 2012.098 с.

([www.unn.ru/books](http://www.unn.ru/books)).

#### **5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**

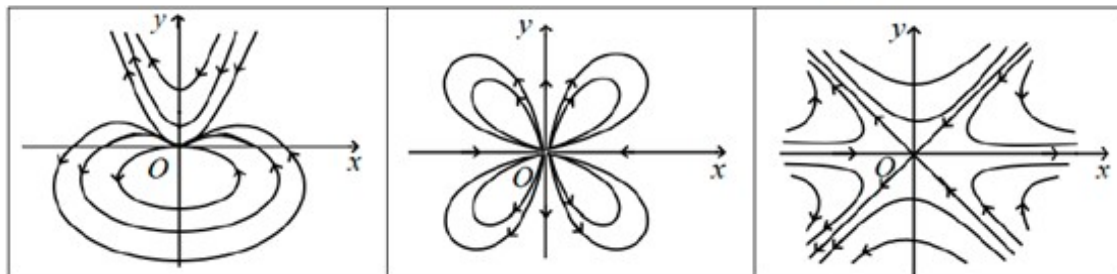
**5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:**

**5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенций ПК-12:**

Определить тип состояния равновесия  $O(0,0)$  системы

$$\frac{dx}{dt} = -y + 2x^2, \quad \frac{dy}{dt} = x + xy.$$

Определить индексы сложных особых точек, представленных на рисунках



### 5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ПК-6:

Доказать, что система не является автоколебательной

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -ax - by + \alpha x^2 + \beta y^2$$

Провести качественный анализ системы при различных значениях параметра  $\mu$ . Найти бифуркационное значение параметра  $\mu$ . Определить тип бифуркации.

$$\frac{dx}{dt} = -y + 2x^2 - \mu(x + xy), \quad \frac{dy}{dt} = x + xy + \mu(-y + 2x^2).$$

Провести полное качественное исследование динамической системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x((x^2 + y^2 + 1)(x^2 + y^2 - 1) - 4y^2) \\ \frac{dy}{dt} &= y((x^2 + y^2 + 1)(x^2 + y^2 - 1) + 4x^2) \end{aligned}$$

### Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

| Оценка      | Критерии оценивания   |
|-------------|---|
| превосходно | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно».   |
| отлично     | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично». |

| Оценка              | Критерии оценивания   |
|---------------------|---|
| очень хорошо        | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо».           |
| хорошо              | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо».                       |
| удовлетворительно   | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно». |
| неудовлетворительно | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо».  |
| плохо               | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо».  |

## 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

### Шкала оценивания сформированности компетенций

| Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций) | плохо   | неудовлетворительно  | удовлетворительно   | хорошо  | очень хорошо  | отлично  | превосходно  |
|--|---|--|---|---|---|--|--|
|  | не зачтено  |  | зачтено   |   |   |  |  |
| <u>Знания</u>  | Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа | Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки                          | Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок            | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет. | Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.                                   |
| <u>Умения</u>  | Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от                     | При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки | Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. | Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми                    | Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены                           | Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с       | Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в |

|               |  |   |  |  |  |  |   |
|---------------|--|---|--|--|--|--|---|
|               | ответа   |   | Выполнены все задания, но не в полном объеме   | ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами               | все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами                                 | отдельным и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме    | полном объеме без недочетов                                       |
| <u>Навыки</u> | Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа | При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки | Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторым и недочетами | Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторым и недочетами | Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов | Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов | Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач |

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

| Оценка     |                     | Уровень подготовки   |
|------------|---------------------|--|
| зачтено    | превосходно         | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой |
|            | отлично             | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».  |
|            | очень хорошо        | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»  |
|            | хорошо              | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».   |
|            | удовлетворительно   | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»                                     |
| не зачтено | неудовлетворительно | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».   |
|            | плохо               | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»  |

**5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:**

**5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-12**



1. Понятие динамической системы. Автономные и неавтономные динамические системы. Понятия фазового пространства, траектории. Типы траекторий динамических систем.
2. Понятие о количественном и качественном исследовании динамических систем. Качественная структура динамической системы. Основная задача качественной теории динамических систем.
3. Особые и неособые полутраектории и траектории. Ячейки динамической системы.
4. Простые и сложные состояния равновесия автономных динамических систем на плоскости. Приведение динамической системы к каноническому виду.
5. Простые состояния равновесия с отличными от нуля действительными частями корней характеристического уравнения. Направления, в которых траектории стремятся к простым состояниям равновесия. Топологическая (качественная) структура окрестностей простых состояний равновесия.
6. Состояния равновесия с чисто мнимыми корнями характеристического уравнения. Проблема различения центра и фокуса. Ляпуновские величины.
7. Теорема Ляпунова о необходимом и достаточном условии наличия центра.
8. Направления, в которых траектории стремятся к сложным изолированным состояниям равновесия. Топологическая структура некоторых сложных состояний равновесия.

### **5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-6**

1. Замкнутые фазовые траектории. Предельные циклы. Орбитальная устойчивость.
2. Поведение траекторий ДС в бесконечно удаленной части плоскости. Преобразование Бендиксона. Преобразования Пуанкаре.
3. Теория индексов Пуанкаре.
4. Метод точечных преобразований. Неподвижные точки. Устойчивость неподвижной точки и ее связь с устойчивостью предельного цикла. Диаграмма Ламерея. Теорема Кёнигса об устойчивости неподвижной точки точечного преобразования отрезка без контакта в себя.
5. Построение функции последования в окрестности замкнутой траектории. Характеристический показатель предельного цикла. Простые и сложные предельные циклы.
6. Критерии отсутствия замкнутых фазовых траекторий (Дюлака для односвязной области, Бендиксона, Дюлака для кольцеобразной области).
7. Топологическая система кривых Пуанкаре.
8. Определение грубой динамической системы. Необходимые и достаточные условия грубости системы.
9. Негрубые динамической системы. Системы первой степени негрубости. Необходимые и достаточные условия первой степени негрубости.
10. Консервативные системы на плоскости и их свойства.
11. Бифуркации динамических систем. Определение бифуркации. Простейшие бифуркации.
12. Зависимость динамической системы от параметров. Определение бифуркационного значения параметра. Некоторые примеры смены качественных структур при изменении параметра. Зависимость динамической системы от двух и более параметров. Определение бифуркационной кривой.
13. Седло-узловая бифуркация.
14. Бифуркация Андронова–Хопфа, понятия «безопасной» и «опасной» области устойчивости состояния равновесия («мягкое» и «жесткое» возбуждения периодических колебаний).
15. Бифуркация двукратного предельного цикла.
16. Бифуркация петли сепаратрис седла.
17. Особенности качественной структуры и бифуркаций динамических систем с цилиндрической фазовой поверхностью. Цилиндрическая фазовая поверхность и возможные виды траекторий. Замкнутые траектории, охватывающие цилиндр. Особенности бифуркаций на цилиндре.

## Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

| Оценка              | Критерии оценивания   |
|---------------------|---|
| превосходно         | Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки   |
| отлично             | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок   |
| очень хорошо        | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок                   |
| хорошо              | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок                         |
| удовлетворительно   | Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок  |
| неудовлетворительно | Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки   |
| плохо               | Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа |

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Андронов Александр Александрович. Теория колебаний / с предисл. Л. И. Мандельштама. - 2-е изд. - М. : Наука, 1981. - 568 с. : ил. - 2.60., 274 экз.
2. Бутенин Н. В. Введение в аналитическую механику : [учеб. пособие для вузов]. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Наука, 1991. - 255 с. : ил. - ISBN 5-02-014221-2 : 2.00., 49 экз.

Дополнительная литература:

1. Морозов А. Д. Введение в математические методы нелинейной динамики : электронное учебно-методическое пособие / Морозов А. Д. - Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2012. - 98 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ННГУ им. Н. И. Лобачевского - Математика., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=730084&idb=0>.
2. Немыцкий Виктор Владимирович. Качественная теория дифференциальных уравнений. - М. ; Л. : Гостехиздат, 1947. - 449 с. - 19.50., 2 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

Программа WInSet (Драгунов Т.Н., Морозов А.Д. Использование программы WInSet для визуализации динамических систем: Учебное пособие. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2007. 102 с., <http://www.unn.ru/pages/e-library/aids/2007/41.pdf>).

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.05.01 - Фундаментальные математика и механика.

Автор(ы): Круглов Евгений Валентинович, кандидат физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Калинин Алексей Вячеславович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 02.12.2024, протокол № 5.