

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол № 15 от 24.12.2025 г.

Рабочая программа дисциплины

Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование

Уровень высшего образования
Бакалавриат

Направление подготовки / специальность
01.03.01 - Математика

Направленность образовательной программы
Математика (общий профиль)

Форма обучения
очная

г. Нижний Новгород

2026 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.28 Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование относится к обязательной части образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-4: Способен собирать, обрабатывать, анализировать и обобщать передовой отечественный и международный опыт в математической и информационной области исследований	<p>ПК-4.1: Знает методы анализа и обобщения отечественного и международного опыта в математической и информационной области исследований</p> <p>ПК-4.2: Умеет применять новые достижения в области научно-технической информации</p> <p>ПК-4.3: Владеет навыками решения задач аналитического характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных способов решения задач</p>	<p>ПК-4.1:</p> <p>Знать определения и основные свойства линейных, аффинных и проективных отображений, формулы наиболее важных отображений.</p> <p>Знать основные типы проекций.</p> <p>Знать определения и основные свойства кривых Безье.</p> <p>Знать определения, основные свойства и алгоритм построения триангуляции Делоне и диаграммы Вороного.</p> <p>Знать определение и свойства кубического сплайна</p> <p>Знать основные краевые условия для кубических сплайнов.</p> <p>ПК-4.2:</p> <p>Уметь находить матрицы линейных и аффинных отображений.</p> <p>Уметь переводить мировые координаты двумерной фигуры в экранные.</p> <p>Уметь находить формулы кубического сплайна для данных краевых условий.</p> <p>Уметь использовать стандартную библиотеку языка Java для создания программ с графическим интерфейсом.</p>	Задачи	<p>Экзамен:</p> <p>Контрольная работа</p> <p>Проект</p> <p>Контрольные вопросы</p>

		<p>ПК-4.3: Владеть навыками создания, отладки и тестирования программ на языке Java. Владеть навыками построения изображения трехмерного объекта на экране компьютера.</p>		
--	--	--	--	--

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	4
Часов по учебному плану	144
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	32
- КСР	2
самостоятельная работа	42
Промежуточная аттестация	36 Экзамен

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	
1. Преобразования координат. Линейные, аффинные и проективные отображения.	33	10	10	20	13
2. Программирование графического интерфейса на языке Java.	20	6	6	12	8
3. Проекции.	20	6	6	12	8
4. Кривые Безье и кубические сплайны.	13	4	4	8	5
5. Триангуляция.	20	6	6	12	8

Аттестация	36				
КСР	2			2	
Итого	144	32	32	66	42

Содержание разделов и тем дисциплины

1. Линейные и аффинные отображения, их матрицы. Линеаризация аффинных пространств и отображений. Аффинные комбинации и барицентрические координаты.
2. Объектно-ориентированное программирование в Java. Векторная графика в пакете Swing.
3. Параллельные проекции. Проективные пространства, проективные отображения, их матрицы. Центральные проекции.
4. Кривые Безье, алгоритм де Кастельжо, полиномы Бернштейна, их свойства. Кубические сплайны, различные краевые условия.
5. Триангуляция Делоне и диаграммы Вороного. Итеративный алгоритм построения триангуляции Делоне, его корректность и сложность.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

В самостоятельной работе студентам следует использовать конспекты лекций, основную и дополнительную литературу, а также Интернет-ресурсы, указанные в соответствующем разделе.

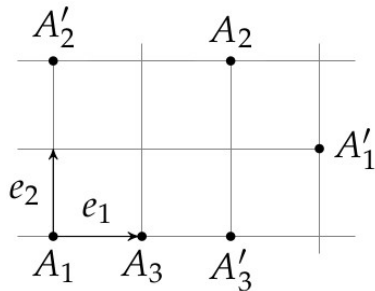
5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ПК-4:

1. Докажите алгебраически, что композиция симметрий относительно пересекающихся прямых есть поворот на удвоенный угол между этими прямыми.
2. Требуется найти матрицу отображения, которое осуществляет поворот на угол φ , за которым следует масштабирование с коэффициентами λ и μ вдоль повернутых осей Ox и Oy , соответственно. В каком порядке нужно перемножать матрицы $R(\varphi)$ и $S(\lambda, \mu)$?
3. Из четырех точек A, B, C, D никакие три не лежат на одной прямой. Точки M, N — середины отрезков AB и CD , а K, L — середины BC и AD . Пересечение MN и KL есть O . P — точка пересечения медиан треугольника BCD . Докажите, что точки A, O, P лежат на одной прямой. В каком отношении O делит отрезок AP ?
4. Даны две барицентрические системы координат на плоскости: $B=(A_1, A_2, A_3)$ и $B'=(A_1', A_2', A_3')$. Пусть координаты точки P относительно первой системы есть (x_1, x_2, x_3) , а относительно второй

— (x_1', x_2', x_3') . Напишите, как x_1, x_2, x_3 выражаются через x_1', x_2', x_3' .



5. На проективной плоскости заданы два проективных репера F_1 и F_2 .

$$F_1 = ((0 : 0 : 2), (0 : 1 : 0), (1/2 : 1 : 1/2), (1 : 3 : 2)),$$

$$F_2 = ((0 : 1 : 1/2), (1 : 1 : 1), (-2 : -4 : 0), (0 : 1 : 2)).$$

Найдите матрицу перехода от F_1 к F_2 .

6. Найдите двумя способами (с помощью полярной формы и с помощью производных в концах отрезка параметризации) опорные точки кривой

$$x(t) = \frac{3}{4}(t - 1)^2 - 3$$

$$y(t) = \frac{3}{4}t(t - 1)^2 - 3t$$

на отрезке $[-1, 3]$. Нарисуйте эскиз кривой.

7. В проекции на ось Ox нормализованный кубический сплайн проходит через точки p_0, p_1, p_2, p_3 и имеет производные p_0' и p_3' в концах. Эти значения представлены в таблице. Найдите производные во внутренних узловых точках и выпишите абсциссы опорных точек q_0, q_1, q_2, q_3 многочленов на всех трех интервалах.

i	0	1	2	3	Номер интервала	q_0	q_1	q_2	q_3
p_i	8	4	8	5	0				
p_i'	1			7	1				
					2				

Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Задача решена полностью или решена основная часть задачи, или задача решена с недочетами.
не зачтено	Задача не решена или сделан только первый этап решения задачи.

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индик)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			

атора достиж ения							
Знания	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
Умения	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
Навыки	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»

	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ПК-4

1. Докажите, что композиция масштабирования с коэффициентами $\lambda, \mu \neq 1$ с центром в начале координат и параллельного переноса на вектор (a, b) есть масштабирование с теми же коэффициентами с центром в некоторой точке. Найдите ее координаты.

4. Рассмотрим треугольник ABC и обозначим величины его углов теми же буквами A, B и C . Известно, что если AA_1 — высота, проведенная из A на BC , то $BA_1 : A_1C = \operatorname{ctg} B : \operatorname{ctg} C$. Аналогичные равенства имеют место для высот BB_1 и CC_1 . С помощью этого факта выразите A_1, B_1 и C_1 через A, B и C . Найдите барицентрические координаты точки пересечения высот (ортоцентра) в барицентрическом репере (A, B, C) .

3. Краевые условия для нормализованного кубического сплайна заданы следующим образом. Выпишите систему уравнений на p'_0, \dots, p'_{n-1} в матричном виде для $n = 5$.

$$f''_0(1/2) = 2f''_0(1), \quad f''_{n-2}(1/2) = 2f''_{n-2}(0)$$

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	сумма баллов за задачи контрольной работы составляет не менее 97% от максимальной суммы баллов.
отлично	сумма баллов за задачи контрольной работы составляет от 90% до 96% от максимальной суммы баллов.
очень хорошо	сумма баллов за задачи контрольной работы составляет от 87% до 89% от максимальной суммы баллов.

Оценка	Критерии оценивания
хорошо	сумма баллов за задачи контрольной работы составляет от 80% до 86% от максимальной суммы баллов.
удовлетворительно	сумма баллов за задачи контрольной работы составляет от 60% до 79% от максимальной суммы баллов.
неудовлетворительно	сумма баллов за задачи контрольной работы составляет от 40% до 59% от максимальной суммы баллов.
плохо	сумма баллов за задачи контрольной работы составляет менее 40% от максимальной суммы баллов.

5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Проект) для оценки сформированности компетенции ПК-4

Используя заготовки, предоставленные преподавателем, написать следующие программы.

1. Программа, рисующая последовательность вписанных квадратов.
2. Программа, строящая ортогональную, косоугольную и центральную проекции трехмерной фигуры.
3. Программа, соединяющая точки на экране кубическим сплайном.

Критерии оценивания (оценочное средство - Проект)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Программа компилируется без ошибок и работает правильно. Используемый алгоритм является эффективным. Исходный код правильно оформлен, снабжен комментариями и использует лучшие практики программирования.
отлично	Программа компилируется без ошибок и работает правильно. Используемый алгоритм является эффективным. Оформление кода и комментарии содержат незначительные погрешности.
очень хорошо	Программа компилируется без ошибок и работает правильно. Используемый алгоритм является эффективным. Оформление кода содержит незначительные погрешности. Используемый алгоритм содержит отдельные неэффективности. Недостаточно комментариев.
хорошо	Программа компилируется без ошибок и работает правильно. Оформление кода содержит погрешности. Эффективность алгоритма можно улучшить. Недостаточно комментариев.
удовлетворительно	Программа компилируется без ошибок, но не во всем работает правильно.

Оценка	Критерии оценивания
	Оформление кода непоследовательное. Эффективность алгоритма можно улучшить. Комментарии отсутствуют.
неудовлетворительно	Программа не компилируется или работает неправильно. Алгоритм неэффективный. Оформление кода непоследовательное.
плохо	Программа не компилируется или не была передана преподавателю.

5.3.3 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-4

1. Переход к новому базису: его матрица, связь между старыми и новыми координатами вектора. Матрица композиции переходов и обратного перехода.
2. Линейное отображение: его матрица, связь между координатами образа и прообраза. Матрица отображения в другом базисе. Матрица композиции отображений.
3. Точечные аффинные пространства. Координаты в аффинных пространствах. Переход к новому реперу, связь между старыми и новыми координатами точки.
4. Аффинные отображения, их действие на векторах. Сохранение координат при аффинных отображениях. Связь между координатами образа и прообраза.
5. Однородные координаты. Матрица перехода к новому реперу, матрица аффинного отображения и обратного отображения в однородных координатах.
6. Аффинные комбинации точек (барицентры), их независимость от выбора системы координат. Деление отрезка в данном отношении как нахождение аффинной комбинации.
7. Барицентрическая система координат. Связь между обычными и барицентрическими координатами. Инвариантность аффинных комбинаций точек при аффинных отображениях.
8. Простые аффинные отображения на плоскости и в пространстве: поворот вокруг начала (осей) координат, симметрия относительно осей координат (координатных плоскостей), масштабирование, наклон, параллельный перенос, проекция вдоль осей координат. Их матрицы, геометрический смысл коэффициентов матриц.
9. Представление аффинного преобразования в виде композиции простых преобразований с целью нахождения его матрицы, примеры.
10. Преобразование мировых координат в экранные, примеры.
11. Классификация и свойства параллельных проекций. Матрица косоугольной проекции.
12. Матрица ортогональной проекции. Изометрия, диметрия и триметрия.
13. Проективное пространство, порожденное векторным пространством. Расширенная плоскость. Проективная система координат, проективные отображения.
14. Центральная проекция как проективное отображение, его матрица и свойства.
15. Объектно-ориентированное программирование на Java: классы, объекты, поля, методы, конструкторы, статические поля и методы.

16. Наследование в Java: классы, абстрактные классы и интерфейсы. Примеры из пакета `java.awt.geom`. Использование подкласса `JPanel` для рисования.
17. Методы класса `java.awt.Graphics` для рисования, используемые в них координаты. Графический контекст.
18. Векторная графика в Java: пакет `java.awt.geom`, интерфейс `java.awt.Shape`, классы `java.awt.Graphics2D`, `java.awt.geom.Path2D` и `java.awt.geom.AffineTransform`.
19. Виды вложенных классов. Использование вложенных классов для получения ввода от мыши и событий от таймера.
20. Полярные формы, их существование. Построение параметрических полиномиальных кривых с помощью алгоритма де Кастельжо.
21. Получение полиномов Бернштейна при вычислении полярных форм. Определение кривых Безье для заданного набора контрольных точек с помощью полиномов Бернштейна.
22. Свойства полиномов Бернштейна: график, начальная и конечная точки, неотрицательность на $[0, 1]$, симметричность, равенство суммы единице.
23. Свойства кривых Безье: принадлежность выпуклой оболочке контрольных точек, рекурсивное свойство, инвариантность при аффинных отображениях.
24. Производная кривой Безье.
25. Увеличение степени кривой Безье.
26. Кубический сплайн. Вычисление производных в промежуточных узлах.
27. Кубический базис Эрмита. Матрицы перехода между этим базисом и кубическим базисом Бернштейна, а также стандартным (т.е. степенным) базисом.
28. Диаграмма Вороного для множества точек. Ячейка точки, её представление в виде пересечения полуплоскостей, выпуклость ячейки. Максимальное количество общих граней у двух ячеек. Характеризация вершин диаграммы Вороного.
29. Мотивация для триангуляции Делоне. Допустимые и оптимальные триангуляции. Характеризация допустимых триангуляций в терминах описанных окружностей.
30. Триангуляция Делоне, её допустимость и оптимальность в случае общего расположения точек.
31. Итеративный алгоритм построения триангуляции Делоне, его корректность.

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	свободное владение основным и дополнительным материалом без ошибок и погрешностей.
отлично	свободное владение основным материалом с незначительными ошибками и погрешностями.
очень хорошо	достаточное владение основным материалом с незначительными погрешностями.
хорошо	владение основным материалом с рядом заметных погрешностей.

Оценка	Критерии оценивания
удовлетворительно	владение минимальным материалом, необходимым по данному предмету, с рядом ошибок.
неудовлетворительно	владение материалом недостаточно, необходима дополнительная подготовка.
плохо	отсутствие владения материалом.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Макаров Е. М. Элементы двумерной графики в Java : учебно-методическое пособие / Макаров Е. М. - Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2017. - 56 с. - Рекомендовано методической комиссией Института информационных технологий, математики и механики для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 01.03.01 «Математика», 02.03.01 «Математика и компьютерные науки». - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ННГУ им. Н. И. Лобачевского - Информатика., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=729892&idb=0>.
2. Макаров Е. М. Линейные и аффинные пространства в компьютерной геометрии : учебно-методическое пособие / Макаров Е. М. - Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2019. - 36 с. - Рекомендовано методической комиссией Института информационных технологий, математики и механики для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 01.03.01 «Математика», 02.03.01 «Математика и компьютерные науки». - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ННГУ им. Н. И. Лобачевского - Математика., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=709379&idb=0>.
3. Шульц Михаил Михайлович. Аналитическая и вычислительная геометрия : спецкурс : учеб.-метод. пособие для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки "Информ. технологии", "Приклад. математика и информатика" / ННГУ. - Н. Новгород : [б. и.], 2010 (Тип. ННГУ). - 125 с. - 80.00., 100 экз.
4. Кострикин Алексей Иванович. Введение в алгебру : учеб. для студентов ун-тов, обучающихся по специальностям "Математика" и "Прикладная математика". - Изд. 2-е, испр. - М. : Физматлит, 2001-. Введение в алгебру. Ч. 2. Линейная алгебра. - 2001. - Изд. 2-е, испр. - 368 с. - ISBN 5-9221-0168-4 (т. 2) : 140.00., 36 экз.

Дополнительная литература:

1. Препарата Франко. Вычислительная геометрия : введение / пер. с англ. С. А. Вичеса, М. М. Комарова ; под ред. Ю. М. Баяковского. - М. : Мир, 1989. - 478 с. : ил. - Пер. изд.: Computational geometry. An introduction / Franco P. Preparata, Michael Jan Shamos (New York etc.) . - ISBN 5-03-001041-6 (в пер.) : 2.80., 10 экз.
2. Боресков А. В. Компьютерная графика : учебник и практикум / А. В. Боресков, Е. В. Шикин. -

Москва : Юрайт, 2022. - 219 с. - (Профессиональное образование). - URL:
<https://urait.ru/bcode/495978> (дата обращения: 14.08.2022). - ISBN 978-5-534-11630-4 : 739.00. -
Текст : электронный // ЭБС "Юрайт"., [https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?
Action=FindDocs&ids=819401&idb=0](https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=819401&idb=0).

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

Загрузка JDK: <https://www.oracle.com/java/technologies/downloads>.

Документация по языку программирования Java (Java SE 21 API Specification):

<https://docs.oracle.com/en/java/javase/21/docs/api/index.html>.

Загрузка IntelliJ IDEA Community Edition: <https://www.jetbrains.com/idea/download>.

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.01 - Математика.

Автор(ы): Макаров Евгений Маратович.

Заведующий кафедрой: Золотых Николай Юрьевич, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 17.12.2025, протокол № протокол №6.