

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол № 15 от 24.12.2025 г.

Рабочая программа дисциплины

Дополнительные главы теории вероятностей

Уровень высшего образования
Бакалавриат

Направление подготовки / специальность
01.03.02 - Прикладная математика и информатика

Направленность образовательной программы
Математическое моделирование и искусственный интеллект

Форма обучения
очная

г. Нижний Новгород

2026 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.ДВ.07.04 Дополнительные главы теории вероятностей относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-13: Способен участвовать в исследовании математических моделей в естественных науках и технике	<p>ПК-13.1: Знает методы создания, анализа и исследования математических моделей в естественных науках и технике</p> <p>ПК-13.2: Знает математические методы обработки информации, полученной в результате экспериментальных исследований</p> <p>ПК-13.3: Умеет корректно использовать методы создания, анализа и исследования математических моделей, умеет применять численные и аналитические методы решения базовых математических задач и классических задач естествознания в практической деятельности</p> <p>ПК-13.4: Владеет навыками использования математических методов обработки информации, полученной в результате экспериментальных исследований</p>	<p>ПК-13.1:</p> <p>Знать:</p> <p>постановки задач и основные закономерности построения математических стохастических моделей;</p> <p>-терминологию теории вероятностей и математической статистики, основными теоретическими подходами и прикладными методами, позволяющими получить решение задач прикладной теории вероятностей;</p> <p>-навыки применения полученных знаний при анализе конкретных математических моделей;</p> <p>-навыки разработки необходимых алгоритмов численного моделирования.</p> <p>ПК-13.2:</p> <p>Уметь:</p> <p>находить параметры стохастических моделей, стационарные режимы систем и области их существования в пространстве параметров на основе применения методов и приемов качественно-численного исследования,</p> <p>-планировать вычислительный эксперимент на ЭВМ,</p>	<p>Аудиторная контрольная работа</p> <p>Задания</p> <p>Контрольная работа</p>	<p>Экзамен:</p> <p>Дискуссионное обсуждение</p>

		<p><i>-давать физическую интерпретацию полученным результатам на примерах анализа стохастических моделей;</i></p> <p><i>-профессионально разрабатывать и использовать программное обеспечение для принятия статистических решений, когда процесс имеет случайный характер, проводить процедуры тестирования информационных систем.</i></p> <p>ПК-13.3: Уметь: <i>находить параметры стохастических моделей, стационарные режимы систем и области их существования в пространстве параметров на основе применения методов и приемов качественно-численного исследования,</i></p> <p><i>-планировать вычислительный эксперимент на ЭВМ,</i></p> <p><i>-давать физическую интерпретацию полученным результатам на примерах анализа стохастических моделей;</i></p> <p><i>-профессионально разрабатывать и использовать программное обеспечение для принятия статистических решений, когда процесс имеет случайный характер, проводить процедуры тестирования информационных систем.</i></p> <p>ПК-13.4: Владеть: <i>навыками использования стохастических моделей при обработке экспериментальных статистических данных</i></p>		
--	--	--	--	--

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	3
Часов по учебному плану	108
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	16
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	16
- КСР	2
самостоятельная работа	38
Промежуточная аттестация	36 Экзамен

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о
Тема 1 Случайные величины и их вероятностные распределения 1.1. Случайные величины и векторы. Распределения дискретных величин. 1.2. Распределения непрерывных величин. 1.3. Математические ожидания. 1.3. Теоремы о предельном переходе под знак математического ожидания.	10	2	2	4	6
Тема 2 Условные распределения и условные математические ожидания. 2.1. Условные распределения дискретных и непрерывных величин. 2.2. Условные математические ожидания.	10	2	2	4	6
Тема 3. Условные распределения и условные математические ожидания. 2.1. Условные распределения дискретных и непрерывных величин. 2.2. Условные математические ожидания	18	4	4	8	10
Тема 4. Предельные теоремы для независимых с.в. и модели теории вероятностей 4.1. Слабые и усиленные законы больших чисел. 4.2. Центральные теоремы для независимых с.в.: Леви, Феллера, Ляпунова. Устойчивые распределения: применение в экономике. 4.3. Применение калькулятора обратного нормального распределения. 4.4. Предельные теоремы для экстремальных статистик. Применение к построению моделей теории вероятностей. Гистограмма и э.ф.р	16	4	4	8	8
Тема 5. Построение моделей теории вероятностей для зависимых случайных величин. Марковские цепи. 5.1. Цепи Маркова с дискретным	16	4	4	8	8

временем. Переходные вероятности. Примеры. 5.2. Эргодические теоремы и распределение экстремальных статистик для неоднородных и зависимых величин. Расчет статистических характеристик. 5.3. Применение марковских цепей и экстремальных статистик. Вероятностные модели роста.					
Аттестация	36				
КСР	2			2	
Итого	108	16	16	34	38

Содержание разделов и тем дисциплины

Случайные величины и их вероятностные распределения

1.1. Случайные величины и векторы. Распределения дискретных величин.

1.2. Распределения непрерывных величин.

1.3. Математические ожидания.

1.3. Теоремы о предельном переходе под знак математического ожидания.

Условные распределения и условные математические ожидания.

2.1. Условные распределения дискретных и непрерывных величин.

2.2. Условные математические ожидания

Условные распределения и условные математические ожидания.

2.1. Условные распределения дискретных и непрерывных величин.

2.2. Условные математические ожидания

Предельные теоремы для независимых с.в. и модели теории вероятностей

4.1. Слабые и усиленные законы больших чисел.

4.2. Центральные теоремы для независимых с.в.: Леви, Феллера, Ляпунова. Устойчивые распределения: применение в экономике.

4.3. Применение калькулятора обратного нормального распределения.

4.4. Предельные теоремы для экстремальных статистик. Применение к построению моделей теории вероятностей. Гистограмма и э.ф.р

Построение моделей теории вероятностей для зависимых случайных величин. Марковские цепи.

5.1. Цепи Маркова с дискретным временем. Переходные вероятности. Примеры.

5.2. Эргодические теоремы и распределение экстремальных статистик для неоднородных и зависимых величин. Расчет статистических характеристик.

5.3. Применение марковских цепей и экстремальных статистик. Вероятностные модели роста.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:

Электронные курсы, созданные в системе электронного обучения ННГУ:

Современные методы статистического оценивания параметров: эл. издание, 2016, : <http://www.unn.ru/books/resources.html> (№1328.16).

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Аудиторная контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ПК-13:

Контрольная работа №1

Вариант 1.

Рассматривается ряд распределения остаточного удлинения болтового железа (%):

(%)	26	28	30	32	34	36	38	40	42
(сколько раз наблюдалось)	1	6	27	40	54	45	23	7	2

Источник: Беккер, Р., Плаут, Г., Рунге, И. Математическая статистика в применении к проблемам массового производства, М.: Гостехиздат, 1933. - 120 с., с.25 .,

т.е. имеется повторная выборка объема из неизвестного непрерывного распределения , где остаточное удлинение железа.

Критерии оценивания (оценочное средство - Аудиторная контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

Оценка	Критерии оценивания

5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ПК-13:

Построить вероятностную модель

Имеется повторная выборка из неизвестного непрерывного распределения, где высота самых крупных наводнений Санкт-Петербурга.

Вариационный ряд, составлен по исходной выборке (Источник: https://ru.wikipedia.org/wiki/Наводнения_в_Санкт-Петербурге)

420, 380, 320, 270, 260, 250, 240, 230, 225,

1 1 1 8 7 5 12 8 5

Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.1.3 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ПК-13:

Построить и обсудить вероятностную модель

Рассматривается совокупный месячный доход семьи. Данные представлены ниже (I величина дохода в условных единицах, D сколько раз наблюдался такой доход):

I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	2	15	44	83	108	110	83	75	49	34
I	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	27	21	24	13	13	19	8	3	2	2
I	21	22	23	24						
D	1	3	1	2						

Источник: Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: основы моделирования и первичная обработка данных. М: Финансы и Статистика, 1983.472 с., с.175-177.

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
неудовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельным и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка	Уровень подготовки
--------	--------------------

зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Дискуссионное обсуждение) для оценки сформированности компетенции ПК-13

1. Пусть

$$a_1 = \frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2}, a_2 = \frac{\theta_2}{\theta_1 + \theta_2}, \theta_1, \theta_2 > 0$$

и

$$P(X = m) = a_1 \frac{\theta_1^{-m}}{m!} e^{-\theta_1} + a_2 \frac{\theta_2^{-m}}{m!} e^{-\theta_2}, m = 0, 1, 2, \dots$$

Используя выборку x_1, x_2, \dots, x_n найти оценки параметров θ_1, θ_2 по методу моментов. Найти значение этой оценки, если

$n = 15$, а выборка равна 5, 4, 4, 2, 0, 0, 2, 1, 1, 3, 2, 4, 1, 2, 0.

1. Пусть x_1, x_2, \dots, x_n – выборка из распределения с плотностью

$$f(x; a, b) = b \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + (1-b) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}, 0 \leq b \leq 1.$$

Найти по методу моментов оценки параметров a и b . Определить их значения по выборке 0.32, 7.09, -3.24, 1.26, 10.76, 0.93, 1.14, 1.77, -6.39, 2.48, 1.68, -1.13, -1.54, 3.92.

Критерии оценивания (оценочное средство - Дискуссионное обсуждение)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
неудовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Бикел Питер Дж. Математическая статистика. Вып. 1 / П. Д. Бикел, К. Доксам ; пер. с англ. Ю. А. Данилова ; предисл. Ю. Н. Тюрина. - Москва : Финансы и статистика, 1983. - 278 с. : граф. - (Математико-статистические методы за рубежом). - 2.40., 2 экз.

Дополнительная литература:

1. Ширяев Альберт Николаевич. Вероятность : учеб. пособие для студентов ун-тов по специальности "Математика". - М. : Наука, 1980. - 575 с. : ил. - 1.50., 25 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

: <http://www.unn.ru/books/resources.html> (№1328.16)

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.02 - Прикладная математика и информатика.

Автор(ы): Тихов Михаил Семенович, доктор физико-математических наук, профессор.

Заведующий кафедрой: Зорин Андрей Владимирович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 17.12.2025, протокол № протокол №6.