

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**федеральное государственное автономное**  
**образовательное учреждение высшего образования**  
**«Национальный исследовательский**  
**Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»**

**УТВЕРЖДЕНО**  
решением ученого совета ННГУ  
протокол от «02» декабря 2024 г. № 10

**Рабочая программа дисциплины**  
**Вариационно-разностные методы**

Уровень высшего образования  
**Подготовка кадров высшей квалификации**

Научная специальность  
**1.1.7 Теоретическая механика, динамика машин**

Программа подготовки  
научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре  
**Теоретическая механика, динамика машин**

Форма обучения  
**Очная**

Нижний Новгород  
2025 год



## 1. Место и цель дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина «Вариационно-разностные методы» относится к числу обязательных дисциплин образовательного компонента программы аспирантуры и изучается на 2 году обучения в 4 семестре.

**Цель дисциплины** – ознакомить аспирантов с современными подходами решения задач механики сплошных с использованием вариационно-разностных методов.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Выпускник, освоивший программу, должен

**Знать:**

- модели и методы решения задач механики деформируемого твердого тела, в том числе в междисциплинарных областях, реализованные в профессиональных пакетах прикладных программ;

-основные тенденции развития современных численных методов и программного обеспечения для решения задач динамики конструкций, в том числе в междисциплинарных областях

**Уметь:**

- осознанно выбрать оптимальные модели и методы решения исследовательских и практических задач механики деформируемого твердого тела;

- разрабатывать новое и модифицировать существующее программное обеспечение на основе созданных и адаптированных численных методов решения исследовательских и практических задач динамики и прочности;

**Владеть:**

-навыками решения нестандартных задач механики деформируемого твердого тела;

- навыками разработки и адаптации численных методов при решении нестандартных задач динамики и прочности конструкций

## 3. Структура и содержание дисциплины.

Объем дисциплины (модуля) составляет 1 з.е., из которых 12 часов составляет контактная работа обучающегося с преподавателем (6 часов занятия лекционного типа, 4 часа занятия семинарского типа (семинары и научно-практические занятия), 1 час групповые консультации, 1 час индивидуальные консультации, 1 час мероприятия текущего контроля успеваемости, 1 час мероприятия промежуточной аттестации), 24 часа составляет самостоятельная работа обучающегося.

**Таблица 2**

**Структура дисциплины**

Наименование раздела дисциплины	Всего, часов	В том числе					Самостоятельная работа обучающегося, часов
		Контактная работа, часов					
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Консультации	Всего	

1. Вариационно-разностные схемы, метод конечных элементов, конечно-разностное представление и анализ вариационно-разностных и КЭ схем	18	2	2	0	2	6	12
2. Исследование аппроксимации и устойчивости вариационно-разностных методов	18	2	2	0	2	6	12
Промежуточная аттестация - зачет							
Итого	36	4	4	0	4	12	24

**Таблица 3**

**Содержание дисциплины**

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела	Форма проведения занятия	Форма текущего контроля*
1	Вариационно-разностные схемы, метод конечных элементов, конечно-разностное представление и анализ вариационно-разностных и КЭ схем	Вариационная постановка задач математической физики. Сеточная аппроксимация вариационных уравнений. Метод конечных элементов. Преобразование вариационно-разностных и КЭ схем к конечно-разностному виду. Методы теории разностных схем: гармонический анализ, методы дифференциального приближения и т.д.	Лекции, семинары, групповые и индивидуальные консультации	Проверка выполнения домашнего задания в форме реферата и/или научно-исследовательской работы на заданную тему.
2	Исследование аппроксимации и устойчивости вариационно-разностных методов решения задач теории упругости и теории оболочек	Методы исследования аппроксимации конечно-разностных схем. Устойчивость разностных схем. Теорема Лакса. Теорема Куранта-Фридрихса-Леви. Анализ аппроксимации и устойчивости схем МКЭ решения динамических задач теории упругости и теории оболочек типа Тимошенко.	Лекции, семинары, групповые и индивидуальные консультации	Проверка выполнения домашнего задания в форме реферата и/или научно-исследовательской работы на заданную тему.

**4. Формы организации и контроля самостоятельной работы обучающихся**

При подготовке к занятиям обучающиеся изучают и повторяют разделы теоретического материала по конспектам и по учебникам и монографиям из списка литературы. Пишут рефераты по предлагаемой теме.

**5. Фонд оценочных средств для аттестации по дисциплине**

### **5.1. Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине.**

При выполнении всех работ учитываются следующие **основные критерии**:

- уровень теоретических знаний (подразумевается не только формальное воспроизведение информации, но и понимание предмета, которое подтверждается правильными ответами на дополнительные, уточняющие вопросы, заданные членами комиссии);
- умение использовать теоретические знания при анализе конкретных проблем, ситуаций;
- качество изложения материала, то есть обоснованность, четкость, логичность ответа, а также его полнота (то есть содержательность, не исключающая сжатости);
- способность устанавливать внутри- и межпредметные связи,
- оригинальность мышления, знакомство с дополнительной литературой и другие факторы.

#### **Описание шкалы оценивания на промежуточной аттестации в форме зачета**

<b>Оценка</b>	<b>Уровень подготовленности, характеризуемый оценкой</b>
<i>Зачтено</i>	владение программным материалом, понимание сущности рассматриваемых процессов и явлений, умение самостоятельно обозначить проблемные ситуации в организации научных исследований, способность критически анализировать и сравнивать существующие подходы и методы к оценке результативности научной деятельности, свободное владение источниками, умение четко и ясно излагать результаты собственной работы, следовать нормам, принятым в научных дискуссиях.
<i>Не зачтено</i>	непонимание смысла ключевых проблем, недостаточное владение науковедческой терминологией, неумение самостоятельно обозначить проблемные ситуации, неспособность анализировать и сравнивать существующие концепции, подходы и методы, неумение ясно излагать результаты собственной работы, следовать нормам, принятым в научных дискуссиях.

### **5.2. Примеры контрольных вопросов и заданий для текущего контроля успеваемости**

Темы рефератов и научно-исследовательских работ:

1. Сетки конечных элементов в двумерном и трехмерном пространстве. Равномерные, регулярные и нерегулярные сетки. Способы задания сеток.
2. Гармонический анализ численных схем. Применение к анализу аппроксимации и устойчивости.
3. Трехмерные ажурные сетки конечных элементов. Связь с теорией графов. Методы и алгоритмы построения ажурных сеток.
4. Устойчивость численных схем решения динамических задач теории упругости и теории оболочек
5. Ажурные схемы МКЭ решения трехмерных задач механики сплошных сред.

**Примеры** контрольных вопросов и заданий для текущего контроля успеваемости:

1. Разностный аналог формул интегрирования по частям. Сопряженный сеточный оператор.
2. Для заданной схемы МКЭ записать ее конечно-разностное представление.
3. Исследовать аппроксимацию разностной схемы путем разложения неизвестной функции в ряд Тейлора.
4. Сформулировать теорему Лакса и ее частные случаи для линейных сеточных задач.
5. Устойчивость разностных схем решения эллиптических задач. Принцип максимума.
6. Теорема Куранта-Фридрихса-Леви и ее интерпретация для многомерных задач математической физики.
7. Привести примеры «скрытой точности» сеточных задач.
8. Связь ажурных сеток и двудольных графов.

Текущий контроль успеваемости осуществляется преподавателем в ходе проведения занятий.

#### **Вопросы к зачету.**

1.	Аппроксимация, сходимость, устойчивость. Теорема Лакса о сходимости разностных схем.
2.	Анализ аппроксимации разложением в ряд Тейлора. Примеры.
3.	Устойчивость разностных схем решения линейных задач математической физики. Другое определение устойчивости.
4.	Устойчивость по начальным данным, граничным условиям, правой части. Равномерная устойчивость по начальным данным.
5.	Устойчивость сеточной задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Принцип максимума.
6.	Устойчивость разностных схем решения гиперболических и параболических уравнений. Равномерная устойчивость по начальным данным.
7.	Метод гармоник. Примеры исследования устойчивости разностных схем решения параболических и гиперболических задач.
8.	Устойчивость схемы «уголок» решения уравнения переноса.
9.	Схема «кабаре» решения уравнения переноса. Анализ аппроксимации и устойчивости.
10.	Теорема Куранта-Фридрихса-Леви. Примеры применения к анализу устойчивости гиперболических задач.
11.	Анализ устойчивости явной схемы «крест» общего вида. Спектральный критерий устойчивости Неймана.
12.	Анализ устойчивости схемы «крест» решения уравнений теории упругости.
13.	Анализ устойчивости одномерных схем теории пластин типа Тимошенко.
14.	Улучшение устойчивости разностных схем. Схемы со стабилизирующим оператором.
15.	Дисперсионный анализ уравнений и разностных схем на примере одномерного и трехмерного волнового уравнения.
16.	Дисперсионный анализ уравнений и разностных схем теории пластин типа Тимошенко.
17.	Неустойчивость типа «песочные часы». Способы борьбы с данным

видом неустойчивости.
18. Формулы естественной аппроксимации производных.
19. Аппроксимация частных производных методом наименьших квадратов.
20. Базисные и сопряженные сеточные операторы на равномерных косоугольных сетках.
21. Вариационно-разностный метод.
22. Формулы сеточного интегрирования по частям. Вывод сеточных уравнений Эйлера вариационной задачи.
23. Метод конечных элементов. Построение сеточных уравнений для схем МКЭ.
24. Модели оболочек. Вывод уравнений теории пластин Тимошенко из вариационной задачи теории упругости.
25. Разностные схемы теории оболочек Тимошенко. Анализ сходимости.
26. Эквивалентные преобразования сеточных уравнений теории упругости и теории оболочек. Свойства индексной коммутативности.
27. Влияние взаимного расположения конечных элементов на аппроксимацию уравнений теории упругости.
28. Ажурные схемы метода конечных элементов

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины.

### а) Основная литература

1 Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т. Решение задач нестационарной динамики пластин и оболочек вариационно-разностным методом: Учебное пособие. Н.Новгород. Изд-во ННГУ, 2000, 107 с. (20 экз.)

### б) Дополнительная литература

1. Чекмарев Д.Т. Автоматическое построение и анализ конечно-разностного представления вариационно-разностных и КЭ схем. Учебно-методический материал по программе повышения квалификации «Информационные технологии и компьютерное моделирование в математике и механике». Нижний Новгород, 2007, 88 с.  
[http://www.unn.ru/books/met\\_files/UMM\\_C.pdf](http://www.unn.ru/books/met_files/UMM_C.pdf)
2. Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т. Оценки устойчивости и повышение эффективности численных схем решения задач динамики сплошных сред и конструкций. Учебно- методический материал по программе повышения квалификации «Применение программных средств в научных исследованиях и преподавании математики и механики». Нижний Новгород, 2007, 98 с. [http://www.unn.ru/books/met\\_files/UMM\\_BC.pdf](http://www.unn.ru/books/met_files/UMM_BC.pdf)
3. Чекмарев Д.Т., Жидков А.В. Численное решение трехмерных динамических задач теории упругости на основе ажурной схемы МКЭ: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2010. -53 с.  
(<http://www.unn.ru/books/resources.html>)

## 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

- помещения для проведения занятий: лекционного типа, семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для хранения и профилактического обслуживания оборудования и помещения для самостоятельной работы обучающихся, оснащенные

компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ННГУ;

- материально-техническое обеспечение, необходимое для реализации дисциплины, включая лабораторное оборудование;
  - лицензионное программное обеспечение: *Windows, Microsoft Office*;
  - обучающиеся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья обеспечиваются электронными и (или) печатными образовательными ресурсами в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья.
- ресурсам.

Рабочая программа учебной дисциплины составлена в соответствии с учебным планом, Положением о подготовке научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адъюнктуре) (Постановление Правительства РФ от 30.11.2021 № 2122), Федеральными государственными требованиями к структуре программ подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адъюнктуре) (Приказ Минобрнауки РФ от 20.10.2021 № 951).

Авторы:

Автор: Чекмарев Дмитрий Тимофеевич, профессор кафедры теоретической, компьютерной и экспериментальной механики

Рецензент(ы) \_\_\_\_\_

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Программа одобрена на заседании методической комиссии Института информационных технологий, математики и механики \_\_\_\_\_.