

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совета ННГУ

протокол № 1 от 16.01.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Качественно-численные методы исследования динамических систем

---

Уровень высшего образования

Бакалавриат

---

Направление подготовки / специальность

01.03.02 - Прикладная математика и информатика

---

Направленность образовательной программы

Прикладная математика и информатика (общий профиль)

---

Форма обучения

очная

---

г. Нижний Новгород

2024 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.ДВ.04.06 Качественно-численные методы исследования динамических систем относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

| Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)                                                                                 | Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Наименование оценочного средства           |                               |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|-------------------------------|
|                                                                                                                                       | Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Результаты обучения по дисциплине                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Для текущего контроля успеваемости         | Для промежуточной аттестации  |
| ПК-6: Способен изучать и применять программное обеспечение, проводить расчётные работы и выполнять обработку результатов исследований | <p>ПК-6.1: ПК-6.1: Знает методы применения современных программных комплексов, пакетов прикладных программ и автоматизированных систем для решения прикладных задач при проведении исследований</p> <p>ПК-6.2: ПК-6.2: Умеет самостоятельно проводить расчётные работы, выбирать и применять современные программные комплексы, пакеты прикладных программ и автоматизированные системы, обрабатывать и анализировать полученные результаты</p> <p>ПК-6.3: ПК-6.3: Имеет практический опыт применения современного программного обеспечения для решения прикладных задач</p> | <p>ПК-6.1: Знать методы и приемы качественного исследования автономных и неавтономных динамических систем второго порядка; качественно-численные методы построения параметрических и фазовых портретов динамических систем второго порядка.</p> <p>ПК-6.2: Знать – схемы бифуркаций состояний равновесия и периодических движений динамических систем второго порядка<br/>Уметь строить параметрические и фазовые портреты автономных и неавтономных динамических систем второго порядка; устанавливать бифуркации, приводящие к возникновению и смене характера устойчивости состояний равновесия и периодических движений; выделять области притяжения устойчивых элементов</p> | Контрольная работа<br>Практическое задание | Зачёт:<br>Контрольные вопросы |

|  |  |                                                                                                                                                                 |  |  |
|--|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|
|  |  | <p>ПК-6.3:<br/> Владеть опытом качественно – численного исследования конкретных динамических систем второго порядка и интерпретации полученных результатов.</p> |  |  |
|--|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

|                                                                          | очная                    |
|--------------------------------------------------------------------------|--------------------------|
| <b>Общая трудоемкость, з.е.</b>                                          | <b>2</b>                 |
| <b>Часов по учебному плану</b>                                           | <b>72</b>                |
| в том числе                                                              |                          |
| <b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>                           |                          |
| - занятия лекционного типа                                               | <b>16</b>                |
| - занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы) | <b>16</b>                |
| - КСР                                                                    | <b>1</b>                 |
| <b>самостоятельная работа</b>                                            | <b>39</b>                |
| <b>Промежуточная аттестация</b>                                          | <b>0</b><br><b>Зачёт</b> |

#### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

| Наименование разделов и тем дисциплины                                                                | Всего (часы) | в том числе                                                                |                                                                            |             | Самостоятельная работа обучающегося, часы |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|----------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|-------------|-------------------------------------------|
|                                                                                                       |              | Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них |                                                                            |             |                                           |
|                                                                                                       |              | Занятия лекционного типа                                                   | Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы | Всего       |                                           |
|                                                                                                       | 0<br>Ф<br>0  | 0<br>Ф<br>0                                                                | 0<br>Ф<br>0                                                                | 0<br>Ф<br>0 | 0<br>Ф<br>0                               |
| 1. Математическая модель динамической системы и задача ее исследования                                | 8            | 2                                                                          | 2                                                                          | 4           | 4                                         |
| 2. Состояния равновесия автономных динамических систем второго порядка                                | 16           | 4                                                                          | 4                                                                          | 8           | 8                                         |
| 3. Качественно-численное построение фазового портрета автономной динамической системы второго порядка | 19           | 4                                                                          | 4                                                                          | 8           | 11                                        |
| 4. Неавтономные динамические системы второго порядка с периодическими правыми частями                 | 10           | 4                                                                          | 2                                                                          | 6           | 4                                         |

|                                                                                                                              |    |    |    |    |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|----|----|----|----|
| 5. Качественно-численное исследование неавтономных динамических систем второго порядка на основе метода точечных отображений | 18 | 2  | 4  | 6  | 12 |
| Аттестация                                                                                                                   | 0  |    |    |    |    |
| КСР                                                                                                                          | 1  |    |    | 1  |    |
| Итого                                                                                                                        | 72 | 16 | 16 | 33 | 39 |

### Содержание разделов и тем дисциплины

1. Математическая модель динамической системы и задача ее исследования: Понятие динамической системы. Автономные и неавтономные динамические систем. Фазовое пространство. Фазовые траектории. Математическая модель динамической системы. Примеры динамических систем. Задача исследования динамической системы. Параметрический и фазовый портреты. Бифуркация.
2. Состояния равновесия автономных динамических систем второго порядка: Простые состояния равновесия. Фазовая плоскость линейной системы. Поведение фазовых траекторий нелинейной системы в окрестности состояния равновесия в случае действительных, комплексных, кратных корней характеристического уравнения. Состояние равновесия с чисто мнимыми характеристическими корнями. Сложные состояния равновесия. Бифуркации состояний равновесия. Области притяжения устойчивых состояний равновесия
3. Качественно-численное построение фазового портрета автономной динамической системы второго порядка: Численный метод отыскания состояний равновесия и определения их типа. Численный метод построения сепаратрис седловых состояний равновесия. Численный метод построения фазовой траектории, выходящей из произвольной точки фазовой плоскости.
4. Неавтономные динамические системы второго порядка с периодическими правыми частями: Сведение исследования структуры фазового пространства к точечному отображению плоскости в плоскость. Системы с цилиндрическим фазовым пространством. Типы периодических движений. Мультипликаторы. Бифуркации. Поведение фазовых траекторий в окрестности устойчивых, неустойчивых и седловых периодических движений. Области притяжения устойчивых периодических движений. Периодические движения колебательного и вращательного типов.
5. Качественно-численное исследование неавтономных динамических систем второго порядка на основе метода точечных отображений: Численные методы отыскания и исследования устойчивости периодических решений неавтономных динамических систем второго порядка. Численный метод построения сепаратрисных инвариантных кривых точечного отображения плоскости в плоскость.

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

1. Киселева Н.В. Электронный образовательный ресурс по качественно-численным методам исследования неавтономных динамических систем // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2018. Т. 14. № 1. С. 281-292.  
<http://sitito.cs.msu.ru/index.php/SITITO/article/view/364/301>

2. Киселева Н.В. Компьютерный комплекс по качественной теории дифференциальных уравнений для поддержки самостоятельной работы // Образовательные технологии и общество. 2018. Т. 21. № 1. С. 423-434.

Электронный ресурс: [https://www.j-ets.net/ETS/russian/depository/v21\\_i1/pdf/14.pdf](https://www.j-ets.net/ETS/russian/depository/v21_i1/pdf/14.pdf)

## 5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

### 5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

#### 5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ПК-6:

Дана система 
$$\begin{cases} \dot{x} = -x(y+a) \\ \dot{y} = x+by \end{cases}.$$

##### Задание 1.

Аналитически найти состояния равновесия и исследовать их тип и характер устойчивости.

##### Задание 2.

На плоскости параметров построить бифуркационные диаграммы состояний равновесия, содержащие области их существования и устойчивости.

##### Задание 3.

Выяснить бифуркации, происходящие на границах этих областей.

##### Задание 4.

Для каждой области построить фазовый портрет и выделить области притяжения устойчивых состояний равновесия.

#### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

| Оценка     | Критерии оценивания                                                                       |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| зачтено    | Задача решена полностью или решена основная часть задачи, или задача решена с недочетами. |
| не зачтено | Задача не решена или сделан первый этап решения.                                          |

#### 5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Практическое задание) для оценки сформированности компетенции ПК-6:

Для каждой области построить фазовый портрет и выделить области притяжения устойчивых состояний равновесия.

1. Дана автономная система 
$$\begin{cases} \dot{x} = (x+y)^2 - a \\ \dot{y} = -y^2 - ax + b \end{cases}$$

Качественно – численными методами найти состояния равновесия и исследовать их тип и характер устойчивости. На плоскости параметров построить бифуркационные диаграммы состояний равновесия, содержащие области их существования и устойчивости. Выяснить бифуркации, происходящие на границах этих областей. Для каждой области построить фазовый портрет и выделить области притяжения устойчивых состояний равновесия.

2. Дана неавтономная система 
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = b - ky - (a + v \sin t) \sin x \end{cases}$$

Качественно – численными методами исследовать периодические колебательные движения:

- Найти соответствующие им неподвижные точки точечного отображения T, порождаемого фазовыми траекториями, исследовать их тип и характер устойчивости.
- На плоскости параметров  $a, v$  при фиксированных значениях параметров  $b, k$  построить бифуркационные диаграммы периодических колебаний, содержащие области их существования и устойчивости.
- Выяснить бифуркации, происходящие на границах этих областей.
- Для каждой области построить фазовый портрет отображения T.

1.

### Критерии оценивания (оценочное средство - Практическое задание)

| Оценка     | Критерии оценивания                                                     |
|------------|-------------------------------------------------------------------------|
| зачтено    | Выполнена основная часть задания возможно с незначительными недочетами. |
| не зачтено | Выполнено менее половины задания, есть существенные недочеты.           |

### 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

#### Шкала оценивания сформированности компетенций

| Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций) | плохо                                       | неудовлетворительно                         | удовлетворительно             | хорошо                                   | очень хорошо                             | отлично                                  | превосходно                          |
|--------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------------------|-------------------------------|------------------------------------------|------------------------------------------|------------------------------------------|--------------------------------------|
|                                                                          |                                             | не зачтено                                  |                               | зачтено                                  |                                          |                                          |                                      |
| Знания                                                                   | Отсутствие знаний теоретического материала. | Уровень знаний ниже минимальных требований. | Минимально допустимый уровень | Уровень знаний в объеме, соответствующий | Уровень знаний в объеме, соответствующий | Уровень знаний в объеме, соответствующий | Уровень знаний в объеме, превышающий |

|               |                                                                                                              |                                                                                                |                                                                                                                              |                                                                                                                                                           |                                                                                                                                      |                                                                                                                                                   |                                                                                                                          |
|---------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|               | Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа                                | Имели место грубые ошибки                                                                      | знаний. Допущено много негрубых ошибок                                                                                       | ющем программе подготовки . Допущено несколько негрубых ошибок                                                                                            | ющем программе подготовки . Допущено несколько несущественных ошибок                                                                 | ующем программе подготовк и. Ошибок нет.                                                                                                          | м программу подготовки.                                                                                                  |
| <u>Умения</u> | Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа | При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки | Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме | Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами | Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами | Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме | Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов |
| <u>Навыки</u> | Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа   | При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки  | Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами                                      | Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами                                                                   | Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов                                               | Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов                                                                  | Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач                                                        |

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

| Оценка  |                          | Уровень подготовки                                                                                                                                                                                                                                       |
|---------|--------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| зачтено | <b>превосходно</b>       | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой |
|         | <b>отлично</b>           | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».                                                                                                                            |
|         | <b>очень хорошо</b>      | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»                                                                                                                        |
|         | <b>хорошо</b>            | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».                                                                                                                             |
|         | <b>удовлетворительно</b> | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»                                     |

|            |                     |                                                                        |
|------------|---------------------|------------------------------------------------------------------------|
| не зачтено | неудовлетворительно | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно». |
|            | плохо               | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»                |

### 5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

#### 5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-6

|                                                                                                                                                                                                                                                        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Понятие динамической системы. Автономные и неавтономные динамические системы. Фазовое пространство. Математическая модель динамической системы.</li> </ul>                                                    |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Теорема существования и единственности решения задачи Коши.</li> </ul>                                                                                                                                        |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Задача качественного исследования динамической системы. Параметрический и фазовый портрет. Бифуркация.</li> </ul>                                                                                             |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Состояния равновесия автономной динамической системы второго порядка. Простое и сложное состояние равновесия.</li> </ul>                                                                                      |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Типы простых состояний равновесия автономной динамической системы второго порядка.</li> </ul>                                                                                                                 |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Устойчивость траекторий динамических систем. Непрерывная зависимость от начальных условий и параметров.</li> </ul>                                                                                            |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Поведение фазовых траекторий автономной динамической системы в окрестности простого состояния равновесия с действительными различными характеристическими корнями одного знака.</li> </ul>                    |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Поведение фазовых траекторий автономной динамической системы в окрестности простого состояния равновесия с действительными характеристическими корнями разных знаков.</li> </ul>                              |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Поведение фазовых траекторий автономной динамической системы в окрестности простого состояния равновесия с действительными равными характеристическими корнями.</li> </ul>                                    |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Поведение фазовых траекторий автономной динамической системы в окрестности простого состояния равновесия с комплексными характеристическими корнями, имеющими не равную нулю действительную часть.</li> </ul> |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Состояние равновесия автономной динамической системы второго порядка с чисто мнимыми</li> </ul>                                                                                                               |

|                                                                                                                                                                                |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| характеристическими корнями.                                                                                                                                                   |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Типы сложных состояний равновесия автономной динамической системы.</li> </ul>                                                         |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Исследование сложного состояния равновесия с .</li> </ul>                                                                             |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Исследование сложного состояния равновесия с .</li> </ul>                                                                             |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Бифуркации состояний равновесия автономной динамической системы второго порядка.</li> </ul>                                           |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Качественно-численное построение фазового портрета автономной динамической системы второго порядка.</li> </ul>                        |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Неавтономные динамические системы 2-го порядка с периодическими правыми частями. Метод точечных отображений.</li> </ul>               |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Периодические решения неавтономных систем второго порядка с периодическими правыми частями. Мультипликаторы.</li> </ul>               |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Бифуркации периодических решений неавтономных систем второго порядка с периодическими правыми частями.</li> </ul>                     |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Качественно-численное исследование неавтономных динамических систем второго порядка на основе метода точечных отображений.</li> </ul> |

### **Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)**

| Оценка     | Критерии оценивания                        |
|------------|--------------------------------------------|
| зачтено    | Дано 50-100% от общего числа вопроса.      |
| не зачтено | Дано менее 0-50% от общего числа вопросов. |

### **6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)**

Основная литература:

1. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. - М. : Наука, 1967. - 487 с. : черт. - 2.58., 53 экз.
2. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. - М. : Наука, 1972. - 471 с. - 1.89., 51 экз.

Дополнительная литература:

1. Андронов Александр Александрович. Теория колебаний / с предисл. Л. И. Мандельштама. - 2-е изд. - М. : Наука, 1981. - 568 с. : ил. - 2.60., 274 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

1. Киселева Н.В. Компьютерный комплекс по качественной теории дифференциальных уравнений для поддержки самостоятельной работы // Образовательные технологии и общество. 2018. Т. 21. № 1. С. 423-434.

Электронный ресурс: [https://www.j-ets.net/ETS/russian/depositary/v21\\_i1/pdf/14.pdf](https://www.j-ets.net/ETS/russian/depositary/v21_i1/pdf/14.pdf)

### **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки 01.03.02 - Прикладная математика и информатика.

Автор(ы): Киселева Наталья Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент.

Рецензент(ы): Ламакина Л.С..

Заведующий кафедрой: Осипов Григорий Владимирович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 13.12.2023, протокол № 3.