

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО  
решением Ученого совета ННГУ  
протокол от «30» ноября 2022 г. № 13

**Рабочая программа дисциплины**

Дополнительные главы алгебры

---

Уровень высшего образования  
магистратура

---

Направление подготовки / специальность  
01.04.01 Математика

---

Направленность образовательной программы  
Фундаментальная математика и приложения

---

Форма обучения  
очная

---

Нижегород

2023 год

## Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина относится к обязательной части Б1.О.06.

### 1. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
<p style="text-align: center;"><i>УК-1</i></p> <p>Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий</p>	<p style="text-align: center;"><i>УК-1.1.</i></p> <p>Знать принципы системного подхода, позволяющие осуществлять анализ проблемных ситуаций.</p>	<p><i>Знать</i> основные методы и результаты теории алгебраических систем: полей, колец, гомологической алгебры.</p>	Собеседование
	<p style="text-align: center;"><i>УК-1.2</i></p> <p>Уметь вырабатывать стратегию действий основываясь на критическом анализе проблемных ситуаций.</p>	<p><i>Уметь</i> применять теоретические знания к исследованию алгебраических систем.</p>	Задачи
	<p style="text-align: center;"><i>УК-1.3</i></p> <p>Владеть навыками системного подхода к анализу проблемных ситуаций.</p>	<p><i>Владеть</i> навыками исследования алгебраических систем.</p>	Собеседование, задачи
<p style="text-align: center;"><i>ОПК-1</i></p> <p>Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики</p>	<p style="text-align: center;"><i>ОПК-1.1</i></p> <p>Знать основы фундаментальных дисциплин в области математических и (или) естественных наук.</p>	<p><i>Знать</i> основы современной алгебры.</p>	Собеседование
	<p style="text-align: center;"><i>ОПК-1.2</i></p> <p>Уметь выбирать методы решения задач профессиональной</p>	<p><i>Уметь</i> выбирать методы решения алгебраических задач</p>	Задачи

	деятельности на основе теоретических знаний.		
	<i>ОПК-1.3</i> Владеть навыками применения фундаментальных знаний в профессиональной деятельности.	<i>Владеть</i> навыками применения алгебраических методов при решении практических задач	Собеседование, задачи

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	<b>очная форма обучения</b>
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>4 ЗЕТ</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>144</b>
<b>в том числе</b>	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	<b>32</b>
- занятия семинарского типа	<b>32</b>
- текущий контроль (КСР)	<b>2</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>42</b>
<b>Промежуточная аттестация – экзамен</b>	<b>36</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе				Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них				
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего	

	Очная		Очная	Очно-заочная	Заочная												
<i>Тема 1. Основные алгебраические структуры</i>	53		16		16						32		21				
<i>Тема 2. Элементы гомологической алгебры</i>	53		16		16						32		21				
Текущий контроль (КСР)	2										2						
Промежуточная аттестация - экзамен	36																
<b>Итого</b>	144		32		32						66		42				

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме опросов и обсуждения решения практических задач на занятиях семинарского типа.

Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (экзамен).

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Выполнение домашних практических заданий и контрольных работ с последующей проверкой и обсуждением на семинарских занятиях.

Образовательный материал для самостоятельной работы студента:

1. Ленг С. Алгебра. М.: Мир, 1968.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

2. Спеньер Э. Алгебраическая топология. М.: Мир, 1971.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

3. Маклейн С. Гомология. М.: Мир, 1966.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm>

4. Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. М.: ИЛ., 1960.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm>

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 6.2.

**4. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), включающий:**

- 5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	Не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала.  Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений . Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения.  Имели место грубые ошибки.	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания но не в полном объеме.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи . Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продемонстрированы все основные умения, . Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки.  Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки  при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки  при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продемонстрированы навыки  при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценки при промежуточной аттестации

<b>Оценка</b>	<b>Уровень подготовки</b>
---------------	---------------------------

зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

## 6.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения.

### 6.2.1 Контрольные вопросы

<i>вопросы</i>	<i>Код формируемой компетенции</i>
1. Алгебраические расширения полей. Простые алгебраические расширения. Степень расширения. Степень башни расширений.	ОПК-1
2. Сепарабельные расширения. Сепарабельная степень. Теорема о примитивном элементе.	ОПК-1
3. Нормальные расширения. Расширения Галуа. Группа Галуа.	УК-1

4. Основная теорема теории Галуа.	УК-1
5. Идеалы в коммутативных кольцах: простые, максимальные идеалы. Нильрадикал. Спектр кольца. Топология Зарисского.	УК-1
6. Комплексы. Группы гомологий. Морфизмы комплексов. Цепная гомотопия.	УК-1
7. Подкомплекс. Факторкомплекс. Короткая точная последовательность комплексов. Длинная точная последовательность гомологий.	ОПК-1
8. Категории и функторы. Примеры. Естественные преобразования функторов. Представимые функторы. Лемма Ионеды.	УК-1
9. Аддитивные функторы. Прямая сумма. Диаграммы прямой суммы. Прямое произведение объектов категории.	ОПК-1
10. Точность слева функтора Hom.	ОПК-1
11. Тензорное произведение модулей.	ОПК-1
12. Точность справа тензорного произведения на фиксированный модуль.	ОПК-1
13. Теорема сравнения резольвент.	ОПК-1
14. Производные функторы.	УК-1
15. Функторы $Ext^n(A, B)$ . Длинная точная последовательность функторов Ext, соответствующая короткой точной последовательности модулей.	ОПК-1
16. Функторы $Tor_n(A, B)$ . Длинная точная последовательность, соответствующая короткой точной последовательности модулей.	ОПК-1
17. Когомологии групп. Стандартная резольвента тривиального G-модуля Z (B-резольвента). Стандартный комплекс.	УК-1
18. Когомологии алгебр Ли. Стандартный комплекс.	УК-1
19. Ассоциативные кольца. Радикал Джекобсона.	ОПК-1
20. Полупростые модули.	ОПК-1
21. Теорема плотности Джекобсона.	ОПК-1
22. Строение простых артиновых колец.	ОПК-1
23. Строение полупростых артиновых колец.	ОПК-1

### 6.2.2. Типовые задания для оценки сформированности компетенции УК-1

1. Найти группу Галуа поля  $Q(\sqrt{2})$  над  $Q$ .
2. Доказать, что конечное поле является расширением Галуа простого подполя и найти его группу Галуа.
3. Найти примитивный элемент расширения  $Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  над  $Q$  и его минимальный многочлен.
4. Найти группу Галуа поля разложения многочлена  $x^p - x - a, a \in F$ ,  $p$  – характеристика поля  $F$ .
5. Найти группу Галуа общего уравнения степени  $n$ .
6. Пусть  $D$  – тело. Доказать, что кольцо  $M_n(D)$  – простое кольцо.
7. Найти все простые идеалы кольца частных  $A_f$  коммутативного кольца  $A$ .
8. Найти все простые идеалы локального кольца  $A_p$ ,  $p$  – простой идеал.
9. Найти целые элементы поля  $Q(\sqrt{2})$  над  $Q$ .

### 6.2.3 Типовые задачи для оценки сформированности компетенции УК-1

1. Доказать, что для поля  $K$   $M_n(K) \otimes_K M_m(K) \cong M_{mn}(K)$ .
2. Сформулировать основную теорему о строении полупростых артиновых колец.
3. Найти все левые идеалы кольца  $M_n(D)$ .
4. Доказать, что внешняя алгебра векторного пространства  $V$  имеет размерность  $2^n, n = \dim V$ .
5. Доказать, что прямая сумма проективных модулей – проективный модуль.
6. Доказать, что любой модуль может быть вложен в инъективный модуль.
7. Доказать, что функтор  $\text{Hom}$  может быть неточным справа.
8. Доказать, что функтор  $\otimes M$  может быть неточным слева.
9. Построить связывающий гомоморфизм в длинной последовательности гомологий, соответствующей короткой точной последовательности комплексов.
10. Построение группы гомологий симплициального комплекса.
11. Построения сингулярного симплициального комплекса топологического пространства.

### 6.2.4 Типовые задачи для оценки сформированности компетенции ОПК-1

Задача 1.

Найти все левые идеалы кольца  $M_n(D)$ .

Задача 2.

Доказать, что прямая сумма проективных модулей – проективный модуль.

Задача 3.

Доказать, что функтор  $\text{Hom}$  может быть неточным справа.

Задача 4.

Доказать, что функтор  $\otimes M$  может быть неточным слева.

Задача 5.

Построение симплициального комплекса.

Задача 6.

Найти группу Галуа поля  $Q(i)$  над  $Q$ .

Задача 7.

Найти группу Галуа поля  $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$  над  $\mathbb{Q}$ .

### 6.2.5 Типовые задания для оценки сформированности компетенции ОПК-1

1. Доказать точность слева функтора  $\text{Hom}$ .
2. Дать определение функторов  $\text{Ext}^n(A, B)$ .
3. Построить связывающий гомоморфизм длинной точной последовательности когомологий.
4. Дать определение комплекса де Рама.
5. Тензорное произведение модулей.
6. Привести примеры аддитивных категорий. Прямые суммы в аддитивной категории.
7. Найти группу Галуа конечного поля над простым полем.

## 7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### а) Основная литература:

1. Ленг С. Алгебра. М.: Мир, 1968.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

2. Маклейн С. Гомология. М.: Мир, 1966.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm>

### б) Дополнительная литература:

1. Спенсер Э. Алгебраическая топология. М.: Мир, 1971.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

2. Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. М.: ИЛ., 1960.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm>

### в) Интернет-ресурсы:

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics>

## 8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой (лекционного и семинарского типа), оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ВО ННГУ - магистратура по направлению подготовки 01.04.01 Математика.

Автор (ы): д.ф.-м.н., проф. Кузнецов М.И.

Рецензент (ы)

Заведующий кафедрой: д.ф.м.н., проф Кузнецов М.И.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики от 30 ноября 2022 года, протокол № 3.

